MA48D-1 Análisis Funcional. Semestre 2009-02
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Thomas Capelle - Cristóbal Quiñinao - Francisco Collarte

Clase Auxiliar XI

2 de noviembre de 2009

Preliminares.

Para la clase de hoy necesitaremos unas definiciones y Teoremas previos, es por esto que he decidido explicitarlos para tener todos un marco común.

`Definición 1` *Sean E y F dos espacios vectoriales y $T : E \to F$ es una aplicación lineal, para toda forma lineal $y^\star \in F^\star$, $y^\star \circ T$ es una forma lineal sobre E. Decimos que*

$$^tT : y^\star \in F^\star \mapsto y^\star \circ T \in E^\star \tag{1}$$

es la traspuesta de T.

Notemos que de la definición resulta directamente que

$$\langle {}^tTy^\star, x\rangle_{E^\star,E} = \langle y^\star, Tx\rangle_{F^\star,F}, \quad \forall x \in E, y^\star \in F^\star \tag{2}$$

`Lema 1` *Sean E, F dos espacios de Banach y $T : E \to F$ una aplicación lineal continua tal que* $\mathrm{im}(T)$ *es un cerrado, entonces*

$$(\exists c \geq 0)(\forall y \in \mathrm{im}(T))(\exists s \in E)(y = Tx \text{ y } \|x\| \leq c\|y\|) \tag{3}$$

`Teorema 1` *(Banach) Sean E, F dos espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E; F)$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

$$\begin{array}{rl}
(i) & \mathrm{im}(T) \text{ es cerrado,} \\
(ii) & \mathrm{im}(T) = (\ker{}^t T)^\perp, \\
(iii) & \mathrm{im}({}^tT) \text{ es cerrado en } E'_b, \\
(iv) & \mathrm{im}({}^tT) = (\ker(T))^\perp.
\end{array}$$

Demostración.-

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Notemos que $\ker({}^tT) = (\mathrm{im}(T))^\perp$, esto es fácil de ver pues si $y' \in \ker({}^tT)$ se tiene que ${}^tTy' = 0$; de aquí

$$\langle {}^tTy', x\rangle = \langle y', Tx\rangle = 0 \qquad \forall x \in E \tag{4}$$

es decir, $y' \in (\mathrm{im}(T))^\perp$. Reciprocamente si $y' \in (\mathrm{im}(T))^\perp$, entonces

$$\langle y', Tx\rangle = \langle {}^tTy', x\rangle = 0 \qquad \forall x \in E \tag{5}$$

y así $y' \in \ker({}^tT)$. Luego utilizando las relaciones de ortogonalidad sigue que $(\ker({}^tT))^\perp = \overline{\mathrm{im}(T)}$, y así se concluye directamente que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Notemos que de lo probado antes $(\ker T)^{\perp} = \overline{\mathrm{im}({}^tT)}$, luego basta demostrar que $(\ker(T))^{\perp} \subset \mathrm{im}({}^tT)$. Sea $x' \in (\ker(T))^{\perp}$, esto significa que $x' \in E'$ y que

$$(\forall x \in E)(Tx = 0 \Rightarrow \langle x', x\rangle = 0). \tag{6}$$

Definimos una forma lineal y' sobre $\mathrm{im}(T)$ por $\langle y', y\rangle = \langle x', x\rangle$ si $y = Tx$, de (6) queda claro que $\langle x', x\rangle$ no depende de la elección de $x \in E$ tal que $y = Tx$.

Gracias al *Lema 1* podemos escoger x tal que $\|x\| \leq c\|y\|$, de aquí, $|\langle y', y\rangle| \leq c\|x'\|\|y\|$, lo que prueba que y' es una forma lineal continua sobre $\mathrm{im}(T)$, que podemos prolongar (por el Teorema de Hahn-Banach) a una forma lineal continua sobre F que seguimos denotando y'. Finalmente tenemos que $\langle y', Tx\rangle = \langle x', x\rangle$ para todo $x \in E$, de aquí $x' =^t Ty' \in \mathrm{im}({}^tT)$ lo que prueba (iv).

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Sigue de que $\mathrm{im}({}^tT)$ es cerrado en E'_{σ}, luego en E'_b la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

$(iii) \Rightarrow (i)$ (Pendiente)

`Teorema 2` *Sean E y F dos espacios de Fréchet, toda biyección lineal y continua de E en F es un isomorfismo.*

Pregunta 1.

1. Sean E, F dos espacios vectoriales, $T : E \to F$ una aplicación lineal y sea E_0 un subespacio vectorial de E de codimensión finita. Denotamos $T_0 = T\mid_{E_0} : E_0 \to F$.

   a) Mostrar que $\ker(T_0) = \ker(T) \cap E_0$

   b) Dado el espacio vectorial $\ker(T)$, sea E_1 un suplementario algebraico de $\ker(T_0)$. Mostrar que existe un subespacio vectorial E_2 de E tal que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$ (suma algebraica directa).

   c) Mostrar que $\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T_0) \oplus T(E_2)$.

   d) Deducir que T es de Fredholm ssi T_0 lo es, y que

   $$\chi(T) = \chi(T_0) + \mathrm{codim}(E_0) \tag{7}$$

2. Sean E, F, G espacios vectoriales, $T_E \to F$, $S : F \to G$ dos operadores de Fredholm. Sea E_0 un suplementario algebraico de $\ker(T)$. Escribimos el operador

   $$(S \circ T)\mid_{E_0} : E_0 \to G \tag{8}$$

   mostrar que $S \circ T$ es de Fredholm y que

   $$\chi(S \circ T) = \chi(S) + \chi(T) \tag{9}$$

3. Sean E, F dos espacios vectoriales y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Sea F_0 un subespacio vectorial de dimensión finita de F, denotamos $\mathcal{T} : E \times F_0 \to F$ la aplicación lineal

   $$\mathcal{T} : (x, y) \in E \times F_0 \mapsto y - Tx \in F \tag{10}$$

   Mostrar que T es de Fredholm ssi $\mathcal{T}$ lo es y que en este caso

   $$\chi(\mathcal{T}) = \chi(T) + \dim(F_0) \tag{11}$$

Solución.

1. *a*) Evidente.

   b) Sea E_1 un suplementario algebraico de $\ker(T_0)$ en $\ker(T)$, tendremos que $\ker(T) = \ker(T_0) \oplus E_1$. Mostremos que $E_0 \cap E_1 = \{0\}$. Sea $x \in E_0 \cap E_1$, entonces $x \in E_0 \cap \ker(T) = \ker(T_0)$, de aquí $x \in E_1 \cap \ker(T_0)$ y por ende $x = 0$. Así la suma $E_0 + E_1$ es una suma directa; denotamos por E_2 un suplementario algebraico de $E_0 \oplus E_1$ y se tiene lo pedido.

   c) Resulta que
   $$\mathrm{im}(T) = T(E_0) + T(E_1) + T(E_2) = \mathrm{im}(T_0) + T(E_2) \tag{12}$$
   mostremos que esta suma es directa.
   Sea $y \in \mathrm{im}(T_0) \cap T(E_2)$, existe $x_0 \in E_0$ y $x_2 \in E_2$ tales que $y = Tx_0 = Tx_2$, de aquí se obtiene que $x_0 - x_2 \in \ker(T) \subset E_0 \oplus E_1$. La descomposición en suma directa $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$ prueba que $x_2 = 0$, de aquí, $y = Tx_2 = 0$. Se concluye que $\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T_0) \oplus T(E_2)$.

   d) Los subespacios E_1 y E_2 son de dimensión finita, las fórmulas
   $$\ker(T) = \ker(T_0) \oplus E_1, \qquad \mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T_0) \oplus T(E_2) \tag{13}$$
   muestran que T es de Fredholm ssi T_0 es de Fredholm y que
   $$\begin{aligned} \dim(\ker(T)) &= \dim(\ker(T_0)) + \dim(E_1) \\ \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)) &= \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T_0)) - \dim(T(E_2)) \end{aligned}$$
   La aplicación $T\mid_{E_2}$ es inyectiva, $\dim(T(E_2)) = dim(E_2)$ y por consecuencia
   $$\chi(T) = \chi(T_0) + \dim(E_1) + \dim(E_2) = \chi(T_0) + \mathrm{codim}(E_0) \tag{14}$$

2. El operador $S\mid_{\mathrm{im}(T)} : \mathrm{im}(T) \to G$ es de Fredholm gracias al punto anterior, y
   $$\chi(S) = \chi(S\mid_{\mathrm{im}(T)}) + \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)). \tag{15}$$
   El operador $T\mid_{E_0}$ es un isomorfismo, luego el operador $(S \circ T)\mid_{E_0}$ es de Fredholm y
   $$\chi((S \circ T)\mid_{E_0}) = \chi(S) - \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)). \tag{16}$$
   así aplicando nuevamente el punto 1. sigue que $S \circ T$ es de Fredholm y
   $$\chi(S \circ T) = \chi((S \circ T)\mid_{E_0}) + \dim(\ker(T)). \tag{17}$$
   luego
   $$\chi(S \circ T) = \chi(S) + \chi(T). \tag{18}$$

3. Determinemos el núcleo y la imagen de $\mathcal{T}$. En particular tenemos
   $$\ker(\mathcal{T}) = \{(x, y) \in E \times F_0; y - Tx = 0\} = \{(x, Tx); x \in T^{-1}(F_0)\} \tag{19}$$
   luego el núcleo es isomorfo a $T^{-1}(F_0)$. Denotemos por E_0 a un suplementario algebraico de $\ker(T)$: $E = \ker(T) \oplus E_0$. El operador $T\mid_{E_0} : E_0 \to \mathrm{im}(T)$ es entonces un isomorfismo,
   $$T^{-1}(F_0) = (T\mid_{E_0})^{-1}(\mathrm{im}(T) \cap F_0) \oplus \ker(T). \tag{20}$$
   Si $\ker(T)$ es de dimensión finita, la fórmula anterior muestra que $T^{-1}(F_0)$, y por ende $\ker(\mathcal{T})$, es de dimensión finita y
   $$\dim(\ker(\mathcal{T})) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T) \cap F_0). \tag{21}$$

Reciporcamente, si $T^{-1}(F_0)$ es de dimensión finita, a fortriori,

$$\ker(T) = T^{-1}(\{0\}) \subset T^{-1}(F_0) \tag{22}$$

es de dimensión finita.

En cuanto a la imagen de $\mathcal{T}$, tenemos que

$$\mathrm{im}(\mathcal{T}) = \mathrm{im}(T) + F_0; \tag{23}$$

y resulta que $\mathrm{im}(\mathcal{T})$ es de codimensión finita ssi $\mathrm{im}(T)$ lo es. Todo lo anterior prueba que T es de Fredholm ssi $\mathcal{T}$ es de Fredholm. Calculemos la codimensión de $\mathrm{im}\,\mathcal{T})$; denotemos por F_1 a un suplementario algebraico de $\mathrm{im}(T) \cap F_0$ em F_0, entonces $\mathrm{im}(\mathcal{T}) = \mathrm{im}(T) \oplus F_1$, de aquí

$$\mathrm{codim}(\mathrm{im}(\mathcal{T})) = \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)) - \dim(F_1) \tag{24}$$

y

$$\chi(\mathcal{T}) = \chi(T) + \dim(\mathrm{im}(T) \cap F_0) = \chi(T) + \dim(F_0) \tag{25}$$

lo que prueba el resultado deseado.

Pregunta 2.

Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal continua, decimos que T es un operador de Fredholm si se cumple

$$\dim(\ker(T)) < +\infty \qquad \text{y} \qquad \mathrm{codim}(T) < +\infty \tag{26}$$

donde $\mathrm{codim}(T) = \dim(Y \backslash T(X))$.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(E; F)$ un operador de Fredholm.

   a) Sea E_0 un suplementario topológico de $\ker(T)$ y sea F_0 un suplementario algebraico de $\mathrm{im}(T)$

   $$E = \ker(T) + E_0 \qquad \text{y} \qquad F = \mathrm{im}(T) \oplus F_0 \tag{27}$$

   mostrar que la aplicación

   $$\mathcal{T} : (x, y) \in E \times F_0 \mapsto y - Tx \in F \tag{28}$$

   es un isomorfismo topológico.

   b) Deducir que T es a imagen cerrada.

2. Mostrar que un operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ es de Fredholm si y solamente si el operador ${}^tT \in \mathcal{L}(F', E')$ es de Fredholm; entonces

   $$\chi(T) + \chi({}^tT) = 0 \tag{29}$$

   donde $\chi(T) = \dim(\ker(T)) - \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)) \in \mathbb{Z}$.

3. *a*) Sea $T \in \mathcal{L}(E; F)$ un operador de Fredholm y sea $S \in \mathcal{L}(E; F)$. Los subespacios E_0 y F_0 tienen el mismo significado que en la pregunta 1.*a*, mostrar que existe $\varepsilon > 0$, tal que, para $\|S\| \le \varepsilon$, el operador

   $$\mathcal{U} : (x, y) \in E_0 \times F : 0 \to y - (T + S)(x) \in F \tag{30}$$

   es un isomorfismo.

   b) Deducir que el conjunto $Fredh(E; F)$ de operadores de Fredholm es abierto de $\mathcal{L}(E; F)$ y que la aplicación

   $$\chi : T \in Fredh(E; F) \mapsto \chi(T) \in \mathbb{Z} \tag{31}$$

   es continua.

Solución.

1. *a*) Verifiquemos que $\mathcal{T}$ es una biyección, todo $z \in F$ se escribe de manera única como $z = y - z'$ con $y \in F_0$ y $z' \in \mathrm{im}(T)$.

   Además $T\mid_{E_0}: E_0 \to \mathrm{im}(T)$ es biyectiva, esto pues si $T(x) = T(y)$ con $x, y \notin E_0$ entoces

   $$T(x) - T(y) = T(x-y) \qquad \Rightarrow \qquad x - y \in \ker(T) \tag{32}$$

   así, podemos escribir

   $$x = (x-y) + y \qquad (x-y) \in \ker(T), y \in E_0 \tag{33}$$

   luego por la unicidad de la descomposición se tiene $x = y$ y así existe un único $x \in E_0$ tal que $z' = Tx$.

   El subespacio E_0 es cerrado por ser un suplementario topológico; F_0 es completo pues es un subespacio de dimensión finita. Resulta que $E_0 \times F_0$ es un espacio de Banach y, gracias al Teorema de Banach, la biyección lineal continua $\mathcal{T}$ es un isomorfismo topológico.

   b) Basta notar que $\mathrm{im}(T) = \mathcal{T}(E_0 \times \{0\})$.

2. Si T o ${}^tT$ es de Fredholm, entonces $\mathrm{im}(T)$ o $\mathrm{im}({}^tT)$ es cerrado gracias a 1. En este caso, sigue que

   $$\mathrm{im}(T) = (\ker{}^t T)^\perp \text{ y que } \mathrm{im}({}^tT) = (\ker T)^\perp \tag{34}$$

   y entonces se tiene que T es de Fredholm ssi ${}^tT$ lo es (se usa el hecho que M es de dimensión finita ssi $M^\perp$ es de codimensión finita y en cuyo caso $\dim(M) = \mathrm{codim}(M^\perp)$), más aún

   $$\mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)) = \dim(\ker{}^t T) \text{ y } \mathrm{codim}(\mathrm{im}({}^tT) = \dim(\ker(T)) \tag{35}$$

   luego $\chi(T) + \chi({}^tT) = 0$.

3. *a*) Sabemos que el operador $\mathcal{T} : (x,y) \in E_0 \times F_0 \mapsto y - Tx \in F$ es un isomorfismo; del hecho que el conjunto de los isomorfismos es abierto en $\mathcal{L}(E;F)$ se concluye lo pedido si la norma de S es suficientemente pequeña, es decir, si $\|S\| \leq \varepsilon$.

   b) Para $\|S\| \leq \varepsilon$, se tiene que $\chi(\mathcal{U}) = 0$. Del problema anterior $(S+T)\mid_{E_0}$ es de Fredholm y

   $$\chi((S+T)\mid_{E_0}) = -\dim(F_0) \tag{36}$$

   de la pregunta 1. del problema anterior, se deduce que

   $$\chi(S+T) = \mathrm{codim}(E_0) - \dim(F_0) = \chi(T). \tag{37}$$

   lo que prueba que el conjunto de los operadores de Fredholm es abierto en $\mathcal{L}(E;F)$ y el índice es localmente constante, luego es continuo.