Control N°1 (2009/2)
MA48D-1 Análisis Funcional

Profesor : Carlos Conca R.

Auxiliares : Cristóbal Quiñinao, Thomas Capelle, Francisco Collarte

Sea E un espacio de Banach y $A : D(A) \subset E \rightarrow E'$ un operador no-acotado. Se dice que A es monótono ssi

$$\langle Au, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in D(A), \quad (1)$$

y se dice que es maximal si el grafo $G(A)$ de A es maximal (para la relación $\subset$) en el conjunto de los grafos monótonos, esto es,

$$G(A) \subset G(T), \text{ con } T \text{ lineal, monótono} \Rightarrow G(A) = G(T). \quad (2)$$

En todo lo que sigue se supondrá que A es un operador monótono.

(i) Pruebe que A es maximal si y sólo si la siguiente condición se cumple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in E, f \in E' \text{ son tales que } \langle Au - f, u - x \rangle \geq 0 \quad \forall u \in D(A), \\ \text{entonces } x \in D(A) \text{ y } Ax = f. \end{array} \right. \quad (3)$$

(ii) Muestre que la aplicación $x \in D(A) \mapsto \langle Ax, x \rangle$ es convexa.

Nota : En algunos de los problemas que siguen le convendrá utilizar en forma adecuada (y siempre simple) la siguiente observación :

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } \lambda^2 a \geq \lambda b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ entonces } b = 0, \quad (4)$$

la cual se puede demostrar fácilmente que es cierta (hágalo).

(iii) $im(A)$ es subconjunto de E' , luego, por definición, $im(A)^\perp$ es un subconjunto de E . Pruebe que $ker(A) \subset im(A)^\perp$.

(iv) Pruebe que si A es maximal, entonces $D(A)$ es denso en E , y que $G(A)$ es cerrado. Para ello,

(a) Suponga que $D(A)$ no es denso y encuentre $f \in E'$ y $x \in E$ de modo que contradigan (3).

(b) Use (3) por aproximación para ver que $G(A)$ es cerrado.

(v) Pruebe que si $D(A) = E$, entonces A es maximal y continuo.

(Ind. Para demostrar que A es maximal, use la caracterización (3), y la Nota anterior).

En lo que sigue supondremos que E es reflexivo, de modo que no se hará distinción entre E y E'' . Suponiendo que $D(A)$ es denso en E , tiene sentido introducir A^* , quien opera en el cuadro siguiente :

$$A^* : D(A^*) \subset E \rightarrow E'.$$

(vi) Pruebe que bajo estas condiciones se tiene que $im(A)^\perp = ker(A^*)$, y deduzca de (iii) que $ker(A) \subset ker(A^*)$.

(vii) Nos proponemos mostrar que si A es maximal, monótono, entonces A^* es monótono.

(a) Pruebe que si $x \in D(A) \cap D(A^*)$, entonces $\langle A^*x, x \rangle \geq 0$.

(b) Sea $x \in D(A^*)$, $x \notin D(A)$, muestre que $\forall f \in E'$, $\exists u \in D(A)$ tal que

$$\langle Au - f, u - x \rangle < 0,$$

y deduzca, escogiendo adecuadamente f , que $\langle A^*x, x \rangle > 0$. Concluya de (a) y (b) que A^* es monótono.

(viii) Muestre que si A es maximal, entonces $\ker(A) = \ker(A^*)$.

(Ind. Use la caracterización (3)).

(ix) Nos proponemos demostrar que si A es maximal, entonces $\overline{\operatorname{im}(A)} = \overline{\operatorname{im}(A^*)}$. Para ello, use (viii) y el siguiente resultado general, que también debe probar :

E espacio de Banach reflexivo y N un s.e.v. de E' . Entonces $(N^\perp)^\perp = \overline{N}$.

Tiempo : 3³⁰ hrs.