MA48D-1 Análisis Funcional. Semestre 2009-02
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Thomas Capelle - Cristóbal Quiñinao - Francisco Collarte

Clase Auxiliar VIII

6 de octubre de 2009

Pregunta 1.

Sea T un operador continuo en un espacio de Banach E y sea $(\lambda_n)_n$ una sucesión de $\rho(T)$ que converge a $\lambda \in \mathbb{K}$. Demostrar que si la sucesión $(\lambda_n I - T)^{-1}$ es acotada en $\mathcal{L}(E)$ entonces $\lambda \in \rho(T)$.

Solución.

Sea $M > 0$ una mayorante de $(\|(\lambda_n I - T)^{-1}\|)_n$, podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} \|(\lambda_p I - T)^{-1} - (\lambda_q I - T)^{-1}\| &= \|(\lambda_p I - T)^{-1}((\lambda_p I - T) - (\lambda_q I - T))(\lambda_q I - T)^{-1}\| && (1)\\ &= |\lambda_p - \lambda_q| \|(\lambda_p I - T)^{-1}(\lambda_q I - T)^{-1}\| && (2)\\ &\leq |\lambda_p - \lambda_q| M^2 && (3) \end{aligned}$$

la serie (λ_n) es convergente, luego es de Cauchy y de eso sigue que $(\lambda_n I - T)^{-1}$ también lo es en $\mathcal{L}(E)$ que es un Banach por lo que existe S tal que

$$S = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n I - T)^{-1} \tag{4}$$

además, para cada n se tiene que $(\lambda_n I - T)^{-1}(\lambda_n I - T) = (\lambda_n I - T)(\lambda_n I - T)^{-1} = I$, tomando límite y usando la continuidad del producto se concluye lo deseado.

Pregunta 2.

Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y sea T el operador de ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$ definido por

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (Tu)(n) = \lambda_n u(n) \tag{5}$$

1. Demostrar que T es continuo si y solamente si la serie (λ_n) es acotada.
2. En el caso que T es continua, calcular sus valores propios y su espectro.

Solución.

1. Supongamos que $(\lambda_n)_n$ es acotado por M, entonces sigue que

$$\forall u \in \ell^p, \qquad \|Tu\|_p \leq M\|u\|_p \tag{6}$$

y por ende T es continua de norma mayorada por M.

Si por otro lado suponemos que T es continua, escribamos, para $m \in \mathbb{N}$, $u^m(n) = 1$ si $m = n$, $u^m(n) = 0$ sino. Sigue que $u^m \in \ell^p$ y

$$\forall m \in \mathbb{N}, \|Tu^m\|_p = |\lambda_m| \leq \|T\|\|u^m\|_p = \|T\| \tag{7}$$

entonces la sucesión $(\lambda_n)_n$ es acotada por $\|T\|$, más aún, $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$.

2. De la parte anterior suponemos que $(\lambda_n)_n$ es acotada y sea $M = \sup_n(|\lambda_n|)$. Si α es un valor propio de T, entonces se tiene que existe u no nulo tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_n u(n) = \alpha u(n). \tag{8}$$

es claro entonces que como existe $n \in \mathbb{N}$ con $u(n) \neq 0$ sigue que $\lambda_n = \alpha$. Entonces (λ_n) son los únicos valores propios posibles, pero el vector u^m anterior es un vector propio para cada m luego

$$vp(T) = \{\lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}\} \tag{9}$$

Sabemos que $\sigma(T)$ es un cerrado que contiene a los $vp(T)$ entonces tenemos directamente que $\overline{vp(T)} \subset \sigma(T)$. Sea ahora $\alpha \notin \overline{vp(T)}$ y sea $\delta = d(\alpha, vp(T)) > 0$. Sea S el operador en ℓ^p definido por

$$\forall u \in \ell^p, \forall n \in \mathbb{N}, (Su)(n) = (\alpha - \lambda_n)^{-1} u(n). \tag{10}$$

sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\delta < |\alpha - \lambda_n|$ y así

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(Su)(n)| \leq \delta^{-1}|u(n)| \tag{11}$$

por lo que S está bien definido y es continuo de ℓ^p en sí mismo, con norma menor o igual a $\frac{1}{\delta}$. Sigue que

$$(\lambda I - T)S = S(\lambda I - T) = I \Rightarrow \alpha \in \rho(T) \tag{12}$$

finalmente $\overline{vp(T)} = \sigma(T)$.

Pregunta 3.

Sea S el operador definido en ℓ^p $(p \in [1, \infty])$ por

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (Su)(n) = u(n+1) \tag{13}$$

1. Demostrar que si $p < \infty$, entonces $vp(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| < 1\}$ y que si $p = \infty$, $vp(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| \leq 1\}$

2. Deducir que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| \leq 1\}$

3. Sea E un espacio de Hilbert separable y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana de E. Determinar el espectro del operador T definido sobre E por

$$\forall x \in E \qquad Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|e_{n+1})e_n \tag{14}$$

Solución.

1. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Si la serie a coeficientes complejos $u = (u(n))_n$ satisface
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (Su(n)) = u(n+1) = \lambda u(n) \tag{15}$$
entonces necesariamente, $u(n) = \lambda^n u(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Resulta finalmente que el escalar λ es un valor propio de S si y solamente si la serie geométrica de razón λ pertenece a ℓ^p, es decir, si $|\lambda| < 1$ para $p < \infty$ y si $|\lambda| \leq 1$ para $p = \infty$.

2. Primero, recordamos que
$$\sigma(S) \supset \overline{vp(S)} = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| \leq 1\} \tag{16}$$
También, es claro que $\|S\| = 1$ de donde se concluye que $\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| \leq 1\}$ y se tiene lo pedido.

3. Sea Φ el operador de E en ℓ^2 definido por
$$\forall x \in E \quad n \in \mathbb{N} \quad (\Phi x)(n) = (x|e_n) \tag{17}$$
se tiene que Φ es una isometría sobreyectiva de E en ℓ^2.

   Más aún sea, $T = \Phi^{-1} S \Phi$, como S es el operador de traslación a la izquierda definido sobre ℓ^2, entonces S y T tienen los mismos valores espectrales: en efecto, $S - \lambda I$ es invertible ssi $\Phi^{-1}(S - \lambda I)\Phi = T - \lambda I$ lo es, luego
$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| \leq 1\} \tag{18}$$

Pregunta 4.

Sea E un espacio de Banach y T una isometría de E (para precisar ideas $T \in \mathcal{L}(E)$ y $\forall x \in E$ $\|Tx\| = \|x\|$). Denotamos $D = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| < 1\}$, $C = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q.} |\lambda| = 1\}$.

1. Demostrar que $vp(T) \subset C$, $\sigma(T) \subset \overline{D}$ y que si $\lambda \in D$
$$\lambda \in \rho(T) \quad \Leftrightarrow \quad Im(\lambda I - T) = E \tag{19}$$
2. Sea $(\lambda_n)_n$ una serie de $D \cap \rho(T)$ que converge a $\lambda \in D$. Demostrar que $\lambda \in \rho(T)$.
3. Demostrar que $D \cap \rho(T)$ es cerrado y abierto en D y deducir que $D \cap \rho(T)$ es o vacío o igual a D.
4. Demostrar que el espectro de T es o bien contenido en C, o igual a $\overline{D}$ y que el primer caso es verdad sólamente cuando T es sobreyectiva.

Solución.

1. Sea λ un valor propio de T y sea x un vector propio no nulo asociado, entonces $\|Tx\| = \|x\|$ de donde obtenemos que $|\lambda\| = 1$ pues x es no nulo, es decir, $vp(T) \subset C$.

   Por otro lado se tiene que $r(T) \leq \|T\| \leq 1$, y por lo tanto $\sigma(T) \subset \overline{D}$.

   Sea finalmente $\lambda \in D$, entonces el operador $(\lambda I - T)$ es inyectivo (pues $\lambda \notin C$) y por ende, será biyectivo sólo si es sobreyectivo. Resta probar que $(\lambda I - T)$ es biyectivo, entonces $(\lambda I - T)^{-1}$ es continua. Sea $x \in E$ y sea $y = (\lambda I - T)^{-1} x$, luego $\lambda\lambda y - Ty = x$ y con ello
$$\|x\| \geq |\|Ty\| - |\lambda y\|| = (1 - |\lambda|)\|y\| \tag{20}$$
de donde concluimos que $(\lambda I - T)^{-1}$ es continuo y su norma está acotada por $(1 - \lambda)^{-1}$.

2. Hemos visto que si $x \in D \cap \rho(T)$ entonces $\|(xI - T)^{-1}\| \leq (1 - |x|)^{-1}$, esta desigualdad es válida para todos los elementos de $(\lambda_n)_n$. La sucesión $(1 - |\lambda|)^{-1}$ es convergente desde que $\lambda \in D$ y por lo tanto es acotada. El ejercicio 1 asegura que $\lambda \in \rho(T)$.

3. Ya sabemos que el conjunto $D \cap \rho(T)$ es cerrado, pero como $\rho(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$, entonces lo es para la topología de las trazas. De la conexidad de D se deduce que $D \cap \rho(T)$ es vacío o igual a D.

4. Si $D \cap \rho(T) = D$ entonces $\sigma(T) \subset \overline{D} \backslash D = C$. En este caso $0 \in \rho(T)$ y por lo tanto T es sobreyectivo. Reciprocamente si T es sobreyectivo entonces $0 \in \rho(T)$ y se tiene además que $\rho(T) \cap D$ no es vacío y por consiguiente $D \cap \rho(T) = D$.

   Si por otro lado $D \cap \rho(T) = \emptyset$, entonces $D \subset \sigma(T)$. Como además $\sigma(T)$ es cerrado y contenido en $\overline{D}$ se tiene que $\sigma(T) = \overline{D}$.