

MA48D-1 Análisis Funcional. Semestre 2009-02

Profesor: Carlos Conca

Auxiliares: Thomas Capelle - Cristóbal Quiñinao - Francisco Collarte

Clase Auxiliar VII

24 de septiembre de 2009

Pregunta 1.

Sea E un espacio de Banach, sea M un subespacio vectorial de E y sea $f_0 \in E'$. Mostrar que existe $g_0 \in M^\perp$ tal que

$$\inf_{g \in M^\perp} \|f_0 - g\| = \|f_0 - g_0\| \quad (1)$$

Solución.

Primero notemos que $M^\perp$ es cerrado para la topología débil $\star \sigma(E', E)$, esto pues, de la definición de $M^\perp$

$$M^\perp = \{f \in E'; \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in M\} \quad (2)$$

si $f_0 \notin M^\perp$, luego

$$\exists x_0 \in M \text{ tal que } \langle f_0, x_0 \rangle = \alpha > 0 \quad (3)$$

pero considerando

$$\mathcal{O} = \left\{ f \in E'; \langle f, x_0 \rangle > \frac{\alpha}{2} \right\} = \varphi_{x_0}^{-1} \left(\left] \frac{\alpha}{2}, +\infty \right[\right) \quad (4)$$

se tiene claramente que $f_0 \in \mathcal{O}$ que es abierto para la topología débil $\star \sigma(E', E)$.

Consideremos una sucesión minimizante $(g_n) \subset M^\perp$ la cual construiremos de la siguiente manera, para $n \in \mathbb{N}$ sea g_n tal que

$$\|f_0 - g_n\| \leq \inf_{g \in M^\perp} \|f_0 - g\| + \frac{1}{n} \quad (5)$$

el cual existe por definición de ínfimo.

Es claro que (g_n) es acotada, luego como $B_{E'}$ es compacto para la topología débil $\star \sigma(E', E)$ se tiene que existe una subsucesión convergente (g_{n_k}) . Finalmente utilizamos que $M^\perp$ es cerrado y el límite de la subsucesión es un elemento de la adherencia.

Pregunta 2.

Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ de manera tal que $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$. Mostrar que T^* es continua de F' dotado de la topología débil $\star \sigma(F', F)$ en E' dotado de la topología débil $\star \sigma(E', E)$.

Solución.

Sea f_n una secuencia de F' tal que $f_n \rightharpoonup f$ para la topología débil $\star \sigma(F', F)$, luego debemos mostrar que $T^* f_n$ converge a $T^* f$ para la topología débil $\star \sigma(E', E)$, es decir, $\langle T^* f_n, x \rangle \rightarrow \langle T^* f, x \rangle$ para todo $x \in E$.

$$\langle T^* f_n, x \rangle = \langle f_n, Tx \rangle \rightarrow \langle f, Tx \rangle = \langle T^* f, x \rangle \quad (6)$$

Pregunta 3.

Sea E un espacio de Banach y sea $A : E \rightarrow E'$ un operador monótono. Suponemos que para todo $x, y \in E$ la aplicación

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \langle A(x + ty), y \rangle \quad (7)$$

es continua en $t = 0$. Mostrar que A es continua de E fuerte en E' dotado de la topología $\sigma(E', E)$.

Solución.

Sea (x_n) una sucesión que converge fuertemente a x en E , debemos mostrar que $Ax_n \rightarrow Ax$ para $\sigma(E', E)$, es decir, $\langle Ax_n, y \rangle \rightarrow \langle Ax, y \rangle$ para todo $y \in E$.

Suponemos, a fin de encontrar una contradicción, que existe $y \in E$ tal que $\langle Ax_n, y \rangle \not\rightarrow \langle Ax, y \rangle$, de lo que demostramos en la clase auxiliar III se sabe que (Ax_n) es acotada, luego extraemos una subsucesión convergente, digamos

$$\langle Ax_{n_k}, y \rangle \rightarrow \ell \neq \langle Ax, y \rangle \quad (8)$$

aplicando la monotonía a x_{n_k} y $x + ty$ sigue que

$$\langle Ax_{n_k} - A(x + ty), x_{n_k} - x - ty \rangle \geq 0 \quad (9)$$

pero

$$\langle Ax_{n_k} - A(x + ty), x_{n_k} - x - ty \rangle = \langle Ax_{n_k}, x_{n_k} - x \rangle - t \langle Ax_{n_k}, y \rangle \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & - \langle A(x + ty), x_{n_k} - x \rangle + t \langle A(x + ty), y \rangle \\ & \rightarrow -t\ell + t \langle A(x + ty), y \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

es decir

$$-t\ell + t \langle A(x + ty), y \rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (12)$$

luego, usando la continuidad en $t = 0$, sigue que $\langle Ax, y \rangle = \ell$ lo cual es absurdo.

Problema 4.

Sea E un espacio de Banach y sea $x_0 \in E$. Sea $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una función convexa s.c.i., $\varphi \neq +\infty$.

1. Mostrar que las siguientes propiedades son equivalentes

(A) $\exists R > 0, \exists M < +\infty$ tales que $\varphi(x) \leq M \quad \forall x \in E$ con $\|x - x_0\| \leq R$.

(B) $\lim_{f \in E', \|f\| \rightarrow \infty} \{\varphi^*(f) - \langle f, x_0 \rangle\} = +\infty$

2. Suponiendo válida alguna de las hipótesis (A) o (B) probar que

$$\inf_{f \in E'} \{\varphi^*(f) - \langle f, x_0 \rangle\} \text{ se alcanza.} \quad (13)$$

Solución.

1. Suponemos que (A) es cierta, de la definición de φ^* se tiene que

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E} \{\langle f, x \rangle - \varphi(x)\} \quad (14)$$

para $x \in E$ tal que $\|x - x_0\| \leq R$:

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E} \{\langle f, x \rangle - \varphi(x)\} \quad (15)$$

$$\geq \sup_{x \in E, \|x - x_0\| \leq R} \{\langle f, x - x_0 \rangle + \langle f, x_0 \rangle - \varphi(x)\} \quad (16)$$

$$= R \sup_{x \in E, \|x - x_0\| \leq R} \left\{ \left\langle f, \frac{x - x_0}{R} \right\rangle \right\} + \langle f, x_0 \rangle - M \quad (17)$$

$$= R \sup_{y \in E, \|y\| \leq 1} \{\langle f, y \rangle\} + \langle f, x_0 \rangle - M \quad (18)$$

$$= R\|f\| + \langle f, x_0 \rangle - M \quad (19)$$

tomando límite se concluye que (B) es cierto.

Si por el contrario es (B) la hipótesis, denotando por $\psi(f) = \varphi^*(f) - \langle f, x_0 \rangle$ mostraremos que existen dos constantes $k > 0$ y C tales que

$$\psi(f) \geq k\|f\| - C \quad \forall f \in E'. \quad (20)$$

de aquí se tendrá que para $f \in E'$

$$\varphi^*(f) \geq k\|f\| + \langle f, x_0 \rangle - C \quad (21)$$

y (B) resulta directo.

Sin perder generalidad suponemos que $\psi(0) < +\infty$, fijamos $\alpha > \psi(0)$; gracias a la hipótesis (B) existe $r > 0$ tal que

$$\psi(g) \geq \alpha \quad \forall g \in E' \quad \text{con } \|g\| \geq r \quad (22)$$

para $f \in E'$ con $\|f\| \geq r$ escribimos

$$\psi(tf) \leq t\psi(f) + (1-t)\psi(0), \quad t = \frac{r}{\|f\|} \quad (23)$$

reacomodando los términos sigue

$$\alpha - \psi(0) \leq \frac{r}{\|f\|} [\psi(f) - \psi(0)] \quad (24)$$

lo cual conduce a (20).

2. La función ψ es convexa s.c.i. para la topología débil $\star \sigma(E', E)$. De la hipótesis (B) obtenemos que para todo λ el conjunto $\{f \in E'; \psi(f) \leq \lambda\}$ es cerrado y acotado y por ende del teorema de Banach-Alaoglu se deduce que el ínfimo es alcanzado.

Problema 5.

Sea E un espacio de Banach

1. Sea (f_n) una sucesión de E' . Suponemos que para todo x la evaluación $\langle f_n, x \rangle$ converge a un límite. Mostrar que existe $f \in E'$ tal que $f_n \rightharpoonup f$ para la topología débil $\star \sigma(E', E)$.
2. Supongamos que E es reflexivo. Sea (x_n) una sucesión de E tal que para todo $f \in E'$, $\langle f, x_n \rangle$ converge a un límite. Mostrar que existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$ para la topología débil $\sigma(E, E')$.

Solución.

1. Denotemos por f la función definida por el límite puntual $\langle f_n, x \rangle$. Debemos mostrar que se tiene la convergencia para la topología débil $\star \sigma(E', E)$, esto es, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ lo cual se tiene por definición.

2. Recordamos que

$$\|x_n\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} \langle f, x_n \rangle = \max_{f \in E', \|f\| \leq 1} \langle f, x_n \rangle \quad (25)$$

como se tiene la convergencia para cualquier $f \in E'$, en particular se tiene para f_0 , un elemento del argumento del máximo, y por ende concluimos que (x_n) es acotado. Por el Teorema de Kakutani existe subsucesión convergente $x_{n_k} \rightharpoonup x$ para la topología débil $\sigma(E, E')$.

Para concluir basta que utilicemos un argumento de contradicción, de no tener la convergencia de la sucesión completa, existe una subsucesión que está a distancia arbitraria de x , pero a su vez esta subsucesión posee otra subsucesión convergente a, digamos z , en el límite

$$\langle f_0, z \rangle = \langle f_0, x \rangle \quad (26)$$

lo cual es evidentemente un absurdo.

Problema 6.

Sea E es un espacio de Banach tal que E' es separable. Mostrar que existe una sucesión (x_n) de norma 1 que converge débil a 0.

Demostrar que la conclusión también es válida si E un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita.

Solución.

Basta que recordemos que al tener E' separable, sigue que B_E es metrizable para la topología $\sigma(E, E')$ y 0 es un punto adherente a la bola unidad.

Si por otro lado $\dim(E) = \infty$ podemos construir un subespacio X_0 cerrado, separable de dimensión infinita

Problema 7.

Sea T un operador continuo en un espacio de Banach E . Sea $|\lambda| > \|T\|$, entonces

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \quad (27)$$

Solución.

Sea $x \in E$ y sea $y = (\lambda I - T)^{-1}x$. Sigue que $\lambda y = x + Ty$, y así

$$|\lambda| \|y\| \leq \|x\| + \|T\| \|y\|. \quad (28)$$

ahora, si $|\lambda| > \|T\|$, el resultado es directo.