MA48D-1 Análisis Funcional. Semestre 2009-02

Profesor: Carlos Conca

Auxiliares: Thomas Capelle - Cristóbal Quiñinao - Francisco Collarte

Clase Auxiliar V

31 de agosto de 2009

Pregunta 1.

1. Sea E un espacio de Banach y sea $A \subset E$ un subconjunto de E , compacto para la topología débil $\sigma(E, E')$. Mostrar que A es acotado.
2. Sea E un espacio de Banach y sea (x_n) una sucesión de E tal que $x_n \rightharpoonup x$ para la topología débil $\sigma(E, E')$. Escribimos

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (1)$$

mostrar que $\sigma_n \rightharpoonup x$ para la topología débil $\sigma(E, E')$.

3. Sea E un espacio de Banach. Sea $A \subset E$ un subconjunto convexo. Mostrar que la cerradura para la topología débil y para la topología fuerte coinciden.

Solución.

1. Recordemos que uno de los Corolarios del Teorema de Banach-Steinhaus dice:

Sea G un espacio de Banach y sea B un subconjunto de G . Supongamos que $\forall f \in G'$ el conjunto

$$\langle f(B) \rangle = \bigcup_{x \in B} \langle f, x \rangle$$

es acotado (en $\mathbb{R}$) entonces

B es acotado.

Sea $f \in E'$, luego basta que probemos que $f(A)$ es acotado, pero por definición f es continua en la topología $\sigma(E, E')$ y del hecho que A es compacto para dicha topología necesariamente $f(A)$ es acotado, luego A es acotado.

2. Sea $f \in E'$, notemos que

$$\begin{aligned} \langle f, \sigma_n \rangle &= \left\langle f, \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle f, x_i \rangle \end{aligned}$$

como $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ se sabe que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon)$ tal que $\forall n > n_0$

$$|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| < \varepsilon \quad (2)$$

así para $m > n_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle \right| &= \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle) \right| \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle| \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_0} |\langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle| + \frac{1}{m} \sum_{i=n_0+1}^m |\langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle| \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_0} |\langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle| + \frac{m - n_0 - 1}{m} \varepsilon \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_0} |\langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle| + \varepsilon
\end{aligned}$$

tomando $\liminf$ en la expresión anterior se concluye que

$$\left| \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle f, x_i \rangle - \langle f, x \rangle \right| \leq \varepsilon \quad (3)$$

y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle f, x_i \rangle = \langle f, x \rangle \quad (4)$$

haciendo lo mismo para $\limsup$ sigue que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle f, x_i \rangle = \langle f, x \rangle \quad (5)$$

y por consiguiente el límite existe y se tiene

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad (6)$$

3. Primero recordemos que un conjunto convexo es débilmente cerrado para la topología $\sigma(E, E')$ sí y sóloamente sí lo es cerrado para topología fuerte. Luego es claro que

$$\overline{A}^{\sigma(E, E')} \subset \overline{A} \quad (7)$$

pues ambos son cerrados para la topología débil. Pero a la inversa

$$\overline{A} \subset \overline{A}^{\sigma(E, E')} \quad (8)$$

pues ambos son cerrados para la topología fuerte, con lo que se concluye lo pedido.

Pregunta 2.

Sea E un espacio de Banach y sea (x_n) una sucesión de E tal que $x_n \rightharpoonup x$ para la topología débil $\sigma(E, E')$.

1. Mostrar que existe una sucesión (y_n) de E tal que:

$$[\star] \begin{cases} y_n \in \text{conv}(\bigcup_{i=n}^{\infty} \{x_i\}), & \forall n \\ y_n \rightarrow x & \text{fuertemente.} \end{cases}$$

2. Mostrar que existe una sucesión (z_n) de E tal que:

$$[\star\star] \begin{cases} z_n \in \text{conv}(\bigcup_{i=1}^n \{x_i\}), & \forall n \\ z_n \rightarrow x & \text{fuertemente.} \end{cases}$$

Solución.

1. Denotamos $G_n = \text{conv}(\bigcup_{i=n}^{\infty} \{x_i\})$. Como $x_n \rightharpoonup x$ para la topología $\sigma(E, E')$ se deduce que $x \in \overline{G_n}^{\sigma(E, E')}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, como G_n es convexo, del problema anterior sabemos que las cerraduras coinciden en las topologías fuerte y débil $\sigma(E, E')$, luego

$$x \in \overline{G_n} \tag{9}$$

usando que E es un evn, podemos encontrar un $y_n \in G_n$ tal que

$$\|y_n - x\| \leq \frac{1}{n} \tag{10}$$

y por lo tanto hemos encontrado una sucesión (y_n) que cumple $[\star]$.

2. Sea $K_n = \text{conv}(\bigcup_{i=1}^n \{x_i\})$; no es difícil ver que (K_n) es una sucesión creciente de convexos. Denotemos $\rho_n = \text{dist}(x, K_n)$, aseguramos que $\rho_n \rightarrow 0$.

Supongamos que no, entonces existe $\rho > 0$ tal que $\rho_n \geq \rho > 0$, del Teorema de Hahn-Banach podemos separar el abierto convexo $B(x, \rho)$ del convexo $\bigcup_{i=1}^n K_n$ en el sentido amplio, esto es, existe $f \in E'$ con $f \neq 0$ tal que

$$\langle f, x + \rho y \rangle \leq \langle f, x_n \rangle \quad \forall n, \forall y \in E, \|y\| < 1 \tag{11}$$

tomando límite y usando la convergencia de x_n débil $\sigma(E, E')$ se tiene

$$\langle f, x \rangle + \rho \langle f, y \rangle \leq \langle f, x \rangle \quad \forall y \in E, \|y\| < 1 \tag{12}$$

tomando sup y usando la definición de norma para funciones de E'

$$\langle f, x \rangle + \rho \|f\| \leq \langle f, x \rangle \tag{13}$$

lo cual es una contradicción.

Retomando nuestro argumento inicial se tiene que $\rho_n \rightarrow 0$ y por ende es posible construir (z_n) que satisfice $[\star\star]$.

Problema 3.

Sea E un espacio de Banach y sea $K \subset E$ un subconjunto de E , que es compacto para la topología fuerte. Sea (x_n) una sucesión de puntos de K tal que $x_n \rightharpoonup x$ para $\sigma(E, E')$. Mostrar que $x_n \rightarrow x$ para la topología fuerte.

Solución.

Supongamos que no se tiene la convergencia fuerte, esto es, $\exists \varepsilon > 0$ tal que para cualquier $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j > j$ con $\|x_{n_j} - x\| > \varepsilon$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$, como no se tiene la convergencia fuerte consideramos la subsucesión x_{n_j} antes expuesta. Como K es compacto la sucesión anterior tiene una subsucesión convergente, por simplicidad la llamamos igual y el límite es necesariamente distinto de x , digamos y , finalmente sea $f \in E'$ se tiene que

$$x_{n_j} \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad \langle f, x_{n_j} \rangle \rightarrow \langle f, y \rangle \quad (14)$$

así para toda $f \in E'$ se tiene que $\langle f, x \rangle = \langle f, y \rangle$, lo cual no tiene sentido pues sabemos que los conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$ los podemos separar en el sentido estricto.

Problema 4.

Sea E un espacio de Banach. Sea $A \subset E$ un subconjunto cerrado para la topología débil $\sigma(E, E')$. Sea $B \subset E$ un subconjunto compacto para la topología débil $\sigma(E, E')$.

1. Mostrar que $A + B$ es cerrado para la topología débil $\sigma(E, E')$.
2. Suponer que A y B son convexos, no vacíos y disjuntos. Mostrar que existe un hiperplano cerrado que separa A y B en el sentido estricto.

Solución.

1. Mostraremos que $\mathring{C}(A + B)$ es un abierto. Sea $x \notin (A + B)$ y sea $y \in B$, sabemos que existe $V(y)$ vecindad convexa de 0 tal que

$$(x + V(y)) \cap (A + y) = \emptyset \quad (15)$$

esto pues $A + y$ es un cerrado y $x \notin (A + y)$, de aquí $dist(x, A + y) > 0$ y basta considerar

$$V(y) = B \left(0, \frac{dist(x, A + y)}{4} \right)$$

.

Se tiene que

$$B \subset \bigcup_{y \in B} \left[y - \frac{1}{2}V(y) \right]$$

y de la compacidad de B existe un subrecubrimiento finito, ie, existe I con $|I| < \infty$ tal que

$$B \subset \bigcup_{i \in I} \left[y_i - \frac{1}{2}V(y_i) \right]$$

denotamos ahora

$$W = \frac{1}{2} \bigcap_{i \in I} V(y_i)$$

afirmamos que $(x + W) \cap (A + B) = \emptyset$. En efecto, suponemos que existe $w \in W$ tal que

$$x + w \in (A + B)$$

luego existe $i \in I$ tal que

$$x + w \in A + y_i - \frac{1}{2}V(y_i).$$

De aquí se tiene que

$$x \in A + y_i - \left(\frac{1}{2}V(y_i) + w \right) \quad (16)$$

esto quiere decir que existe $a \in A$ y $v_i \in V(y_i)$ tales que

$$x = a + y_i - \left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}2w \right) \quad (17)$$

como $2w, v_i \in V(y_i)$ convexo se concluye que $w' = \left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}2w \right) \in V(y_i)$. Resumiendo existe $w' \in V(y_i)$ tal que $x + w' \in A + y_i$, pero esto implica que

$$(x + V(y_i)) \cap (A + y_i) \neq \emptyset \quad \rightarrow \leftarrow \quad (18)$$

Finalmente es claro que $x + W$ es una vecindad de x disjunta de $(A + B)$, es decir, $\mathcal{C}(A + B)$ es abierto.

2. De lo demostrado en el punto anterior se tiene que $(A - B)$ es un cerrado para la topología débil $\sigma(E, E')$ y por lo tanto fuertemente cerrado. Así se tiene que podemos separar $\{0\}$, convexo compacto, del conjunto $(A - B)$, convexo cerrado, en el sentido estricto.

Problema 5.

Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Nos proponemos demostrar que la topología $\sigma(E, E')$ no es metrizable. Razonemos por absurdo, y supongamos que existe una métrica $d(\cdot, \cdot)$ sobre E tal que la topología asociada coincide con la topología débil $\sigma(E, E')$.

1. Para todo entero $k > 0$ denotamos por V_k una vecindad de 0 para la topología débil $\sigma(E, E')$ tal que

$$V_k \subset \left\{ x \in E; \quad d(x, 0) < \frac{1}{k} \right\}. \quad (19)$$

Mostrar que existe una sucesión (f_n) de E' tal que todo $g \in E'$ se escribe como una combinación lineal finita de f_n .

2. Deducir que E' es de dimensión finita.
3. Concluir.

Solución.

1. Como V_k es una vecindad de 0 para $\sigma(E, E')$ podemos suponer que V_k es de la forma

$$V_k = \{x \in E; |\langle f, x \rangle| < \varepsilon_k, \forall f \in F_k\} \quad (20)$$

con $\varepsilon_k > 0$ y F_k un subconjunto finito de E' . Sigue que el conjunto $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ es numerable.

Mostremos que todo $g \in E'$ se escribe como una combinación lineal finita de elementos de F . Sea $g \in E'$ fijo y consideremos

$$V = \{x \in E; |\langle g, x \rangle| < 1\} \quad (21)$$

Como V es una vecindad de 0 para la topología $\sigma(E, E')$, existe un k tal que $\{x \in E; d(x, 0) < \frac{1}{k}\} \subset V$ y por consiguiente $V_k \subset V$. Si $x \in E$ es tal que $\langle f, x \rangle = 0 \forall f \in F_k$, entonces $tx \in V_k, \forall t \in \mathbb{R}$ y por consiguiente

$$tx \in V, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle g, x \rangle = 0 \quad (22)$$

Recordemos el siguiente Lema:

Sea X un espacio vectorial y sean $\phi_1, \dots, \phi_n$ formas lineales sobre X tales que

$$[\phi_i(v) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n] \Rightarrow [\phi(v) = 0]$$

entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$

luego se concluye que g es una combinación lineal de elementos de F_k .

2. Suponemos que E' es de dimensión infinita, luego se puede reenumerar los elementos de F y decir que $F = \mathbb{N}$. Consideramos F^n el espacio vectorial engendrado por $\{f_i\}_{i=1}^n$, entonces F^n es cerrado y

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^n = E'.$$

Gracias al lema de Baire existe n_0 tal que F^{n_0} es de interior no vacío y por consiguiente $F^{n_0} = E'$ lo cual es evidentemente una contradicción.

3. Si $\dim E' < \infty$ entonces $\dim E < \infty$, esto viene del hecho que $\dim E'' < \infty$ y existe una inyección canónica de E en E'' .