MA48D-1 Análisis Funcional. Semestre 2009-02
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Thomas Capelle - Cristóbal Quiñinao - Francisco Collarte

Clase Auxiliar III

23 de agosto de 2009

Recordemos uno de los corolarios del Teorema de Banach-Steinhaus:

`Sea` G `un espacio de Banach y sea` B' `un subconjunto de` G'`. Supongamos que` $\forall x \in G$ `el conjunto`

$$\langle B', x\rangle = \bigcup_{b \in B'} \langle b, x\rangle$$

`es acotado (en` $\mathbb{R}$`) entonces`

$$B' \texttt{ es acotado.}$$

Pregunta 1.

Sea E un espacio de Banach y sea (ε_n) una secuencia de reales positivos tales que $\lim \varepsilon_n = 0$. Sea (f_n) una secuencia de E' que verifica la propiedad

$$\begin{cases} \exists r > 0, \quad \forall x \in E \text{ con } \|x\| < r, \quad \exists C(x) \in \mathbb{R}, \quad C(x) \geq 0 \text{ tq} \\ \\ \qquad\qquad \langle f_n, x\rangle \leq \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \end{cases}$$

mostrar que (f_n) es acotado.

Solución.

Definamos $g_n = \frac{f_n}{1+\varepsilon_n\|f_n\|}$ y el conjunto $B' = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$. Sea $x \in E$ tenemos los siguientes casos

i. Si $\|x\| < r$ sigue que

$$\langle g_n, x\rangle = \frac{1}{1+\varepsilon_n\|f_n\|}\langle f_n, x\rangle \leq \frac{\varepsilon_n\|f_n\| + C(x)}{1+\varepsilon_n\|f_n\|} \leq 1 + C(x) \tag{1}$$

ii. Se $\|x\| \geq r$, utilizamos $y = \frac{rx}{2\|x\|}$, entonces $\|y\| < r$ y aplicando la cota (1) se tiene

$$\langle g_n, y\rangle \leq 1 + C(y) \quad \Rightarrow \quad \langle g_n, x\rangle \leq \frac{2\|x\|}{r}(1 + C(y)) \tag{2}$$

se concluye que para todo $x \in E$, $\langle g_n, x\rangle$ es acotado, es decir

$$\langle B', x\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle g_n, x\rangle \quad \text{es acotado} \tag{3}$$

por el Corolario antes mencionado, B' es acotado.

Finalmente supongamos que $\|f_n\|$ no es acotada, luego es fácil ver que

$$\|g_n\| = \frac{\|f_n\|}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} \to \infty \tag{4}$$

lo cual es evidentemente una contradicción.

Pregunta 2.

Sea E un espacio de Banach y $D(A)$ un subconjunto de E, decimos que la aplicación

$$A : D(A) \subset E \to E' \text{ es monótona si verifica}$$

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall x, y \in D(A)$$

sea $x_0 \in \widehat{\overset{\circ}{D(A)}}$. Mostrar que existen dos constantes $R, C > 0$ tales que

$$\|Ax\| \leq C, \qquad \forall x \in D(A) \text{ con } \|x - x_0\| < R \tag{5}$$

Solución.

Suponemos que no se tiene lo anterior, entonces

$$\forall R > 0, C > 0 \text{ existe } x \in D(A) \text{ con } \|x - x_0\| < R, \|Ax\| > C \tag{6}$$

luego podemos encontrar una sucesión $x_n \to x$ tales que $\|Ax_n\| \to \infty$. Sea ahora $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset D(A)$, utilizamos la monotonía para x_n y $x_0 + x$ con $\|x\| < r$:

$$\begin{aligned}
&\langle Ax_n - A(x_0 + x), x_n - x_0 - x \rangle \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad &\langle Ax_n, x_n - x_0 \rangle - \langle Ax_n, x \rangle - \langle A(x_0 + x), x_n - x_0 \rangle + \langle A(x_0 + x), x \rangle \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad &\langle Ax_n, x_n - x_0 \rangle - \langle A(x_0 + x), x_n - x_0 \rangle + \langle A(x_0 + x), x \rangle \geq \langle Ax_n, x \rangle
\end{aligned}$$

acotando los productos anteriores se tiene que

$$\langle Ax_n, x \rangle \leq \|Ax_n\| \|x_n - x_0\| + \|A(x_0 + x)\| \|x_n - x_0\| + \|A(x_0 + x)\| \|x\| \tag{7}$$

definiendo $\varepsilon_n = \|x_n - x_0\|$ y asumiendo que $\varepsilon_n \leq 1$ (lo cual es cierto salvo una cantidad finita de términos) se tiene que

$$\langle Ax_n, x \rangle \leq \varepsilon_n \|Ax_n\| + \underbrace{\|A(x_0 + x)\|(1 + \|x\|)}_{C(x)} \tag{8}$$

utilizando el problema anterior concluímos que Ax_n es acotada lo cual contradice el hecho que $\|Ax_n\| \to \infty$.

Pregunta 3.

Sea E un espacio de Banach y sea $T : E \to E'$ un operador lineal tal que

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in E \tag{9}$$

mostrar que T es continuo.

Solución.

i. Veamos una demostración que utiliza lo hecho anteriormente. Sabemos que probando la continuidad en $0 \in E$ basta, pues T es un operador lineal. Como T es monótono (esto es obvio) se sabe que existe $C(0), R(0) > 0$ tales que

$$\|x\| < R(0) \qquad \to \qquad \|Tx\| < C(0) \tag{10}$$

tomando entonces $B\left(0, \frac{\varepsilon R(0)}{C(0)}\right)$ sigue que $\forall y \in B\left(0, \frac{\varepsilon R(0)}{C(0)}\right)$

$$\|y\| < \tfrac{\varepsilon R(0)}{C(0)} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\frac{C(0)y}{\varepsilon}\right\| < R(0)$$

$$\Rightarrow \qquad \left\|T\left(\tfrac{C(0)y}{\varepsilon}\right)\right\| < C(0) \qquad \Rightarrow \qquad \|Ty\| < \varepsilon$$

$$\therefore \text{ es continua en } 0_E$$

ii. Utilicemos ahora el Teorema del Grafo Cerrado para obtener el mismo resultado. Sea

$$x_n \to x$$
$$Tx_n \to f$$

se sabe que $\langle Tx_n - Ty, x_n - y\rangle \geq 0$ luego en el límite

$$\langle f - Ty, x - y\rangle \geq 0 \tag{11}$$

escogemos $y = x + tz$ con $z \in E$ y $t \in \mathbb{R}$ y se obtiene

$$\langle f - Tx - tTz, tz\rangle = t\langle f, z\rangle - t\langle Tx, z\rangle - t^2\langle Tz, z\rangle \geq 0 \tag{12}$$

lo anterior equivale a

$$\langle f - Tx - tTz, tz\rangle = t\langle f, z\rangle - t\langle Tx, z\rangle \geq t^2\langle Tz, z\rangle \geq 0 \tag{13}$$

donde usamos la propiedad de T en la última desigualdad. Se concluye que

$$t(\langle f, z\rangle - \langle Tx, z\rangle) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, z \in E \tag{14}$$

necesariamente $\langle f, z\rangle = \langle Tx, z\rangle$ y como ambas lineales coinciden en su dominio y en todas sus evaluaciones se tiene $f = Tx$, es decir, el grafo es cerrado y por ende T continua.

Pregunta 4.

Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E'$ un operador lineal tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

mostrar que T es continua.

Solución.

Utilizamos el Teorema del Grafo Cerrado, sean $x_n \to x$ y $Tx_n \to f$, luego

$$\langle Tx_n, y\rangle = \langle Ty, x_n\rangle$$

en el límite

$$\langle f, y\rangle = \langle Ty, x\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

por lo que $Tx = f$.