PROBLEMA

Problema 2. Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supongamos que $im(T)$ es cerrada y $Ker(T)$ es de dimensión finita.

Consideremos en E otra norma, que denotaremos $|\cdot|$, y que satisface:

$$|x| \leq M||x||_E, \ \forall x \in E$$

Muestre que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$||x||_E \leq C(|x| + ||Tx||_F), \ \forall x \in E$$

SOL:

Razonando por absurdo, esto es, $\forall C > 0, \exists x \in E$ tal que: $||x||_E \geq C(|x| + ||Tx||_F)$, consideramos: $C = n$, así existe x_n que no satisface la desigualdad, podemos dividir por $||x_n||_E$ a ambos lados, y redefinir x_n para que tenga norma 1 y la desigualdad queda:

$$||x_n||_E = 1, \ ||Tx_n|| + |x_n| \leq 1/n$$

Si ahora consideramos la función T definida hasta su imágen (la cual por ser cerrada es Banach), esta queda sobreyectiva, por lo tanto por el teorema de la aplicación abierta $\exists C > 0$ tal que:

$$T(B_E) \supset C \cdot B_F$$

$$T(B_E)/n \supset C \cdot B_F/n$$

$$T(B_E/Cn) \supset \cdot B_F/n$$

Como $||Tx_n|| + |x_n| \leq 1/n$, entonces: $||Tx_n|| \leq 1/n$, así $Tx_n \in B_F/n$, por lo tanto existe $y_n \in \frac{1}{Cn}B_E$ tal que:

$$Ty_n = Tx_n$$

y como $y_n \in \frac{1}{Cn}B_E$ entonces $||y_n||_E \leq 1/Cn$ y así $||y_n||_E \to 0$. Además, como $Tx_n = Ty_n$, entonces:

$$T(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow (x_n - y_n) \in Ker(T)$$

Esto es, existe $z_n \in Ker(T)$ tal que $x_n - y_n = z_n$, así:

$$||z_n||_E = ||x_n - y_n||_E \geq |\ ||x_n||_E - ||y_n||_E| \to 1$$

Así:

$$\lim ||z_n||_E \geq 1$$

Del mismo modo $|x_n| \leq 1/n$, de donde: $|z_n| \leq 1/n + |y_n| \leq 1/n + M||y_n||_E$ y así: $|z_n| \to 0$, lo cual es imposible pues en $Ker(T)$ las normas $||\cdot||_E$ y $|\cdot|$ son equivalentes.