MA48D-1 Análisis Funcional. Semestre 2009-02
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Thomas Capelle - Cristóbal Quiñinao

Clase Auxiliar I

5 de agosto de 2009

1. Espacios Vectoriales Normados

En lo que sigue veremos unos ejemplos de e.v.n "interesantes"; es necesario recordar que un e.v.n E se dice Banach si es completo, ie, las sucesiones fundamentales tienen un límite en E.

1.1. Funciones de Clase $\mathcal{C}^m$

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ y el espacio de funciones

$$\mathcal{C}^0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es continua en } \Omega\}$$

y para $m \geq 1$ se define

$$\mathcal{C}^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}$$

donde se ha utilizado la notación multi-índice

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

Sea además $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\geq 0} \mathcal{C}^m(\Omega)$.

Por otro lado definimos los siguientes espacios de funciones

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^0(\Omega) \mid u \text{ es acotada en } \Omega, \text{ y uniformemente continua}\}$$

y para $m \geq 1$ se define

$$\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^m(\Omega) \mid D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}$$

Ejercicio 1 Demuestre que $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ detado de la norma del sup, esto es,

$$\|u\|_{m,\Omega} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)| \tag{1}$$

es un espacio de Banach.

demostración.-

- Haremos primero la demostración para funciones de clase $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, se omite el hecho que la expresión 1 es una norma. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j, k \geq n(\varepsilon)$
$$\|u_k - u_j\|_{0,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} |u_k(x) - u_j(x)| \leq \varepsilon \tag{2}$$
Sea $x \in \Omega$ fijo, entonces la sucesión $\{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, que es completo, luego existe un real $u(x)$ tal que $u_k(x) \to u(x)$, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $j \geq n(x, \varepsilon)$ se cumple
$$|u(x) - u_j(x)| \leq \varepsilon \tag{3}$$
Con esto queda definido una función u que es límite puntual de u_k. Notemos que en realidad la convergencia es en norma de la convergencia uniforme, es decir, en norma $\|\cdot\|_\infty$, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $k \geq m(\varepsilon)$
$$\|u_k - u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u_k(x) - u(x)| \leq \varepsilon \tag{4}$$
en efecto, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n(\varepsilon/2)$ tal que $\forall k, j \geq n(\varepsilon/2)$
$$\sup_{x\in\Omega} |u_k(x) - u_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
sea $k \geq n(\varepsilon/2) =: m(\varepsilon)$, para $x \in \Omega$ sabemos existe $n(x, \varepsilon/2) > 0$ tal que
$$|u(x) - u_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
para todo $j \geq n(x, \varepsilon/2)$. Sin pérdida de generalidad suponemos $n(x, \varepsilon/2) > n(\varepsilon/2)$, así
$$|u_k(x) - u(x)| = |u_k(x) - u_j(x)| + |u(x) - u_j(x)| \leq \varepsilon \tag{5}$$
tomando $\sup_{x\in\Omega}$ en la expresión anterior sigue lo deseado.

Del comentario anterior se concluye que u es una función uniformemente continua, esto pues, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $k \geq m(\varepsilon/3)$ y del hecho que u_k es uniformemente continua, ie, existe $\delta(k, \varepsilon/3)$ tal que
$$|x - y| \leq \delta(k, \varepsilon/3) \quad \Rightarrow \quad |u_k(x) - u_k(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$
se concluye que
$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y) - u(y)| \leq \varepsilon \tag{6}$$
Y que u sea acotada viene del mismo hecho, pues tomando $k \geq m(1)$ se tiene
$$|u(x)| \leq |u(x) - u_k(x)| + |u_k(x)| \leq 1 + M_k \tag{7}$$

- Veamos ahora la demostración que $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. En particular tanto $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, como cada una de sus derivadas parciales, son sucesiones de Cauchy en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y por lo tanto tenemos la existencia y convergencia uniforme de las siguientes expresiones
$$\begin{array}{ccc} u_k & \to & u \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \to & \phi_1 \\ & \vdots & \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_N} & \to & \phi_N \end{array}$$

Debemos mostrar que u es diferenciable y que $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \phi_i$ para toda $i = 1, \ldots, N$. Sea $h > 0$ entonces para $k \geq m(u, h^2)$ se tiene

$$\begin{aligned}
|u(x+e_ih) - u(x) - h\phi_i(x)| &\leq |u(x+e_ih) - u_k(x+e_ih)| + \\
&\quad |u_k(x+e_ih) - u_k(x) - h\phi_i(x)| + |u_k(x) - u(x)| \\
&\leq 2h^2 + |u_k(x+e_ih) - u_k(x) - h\phi_i(x)|
\end{aligned}$$

haciendo una expansión de Taylor de $u_k(h + e_ih)$ de orden 1, esto es, usando que

$$u_k(x+e_ih) = u_k(x) + h\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i} + O(h) \tag{8}$$

sigue la desigualdad

$$\left|\frac{u(x+e_ih) - u(x)}{h} - \phi_i(x)\right| \leq \left|\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i} - \phi_i(x)\right| + \frac{O(h)}{h} \tag{9}$$

haciendo $k \to \infty$ y luego $h \to 0$ se concluye que

$$0 \leq \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \phi_i(x)\right| \leq 0 \tag{10}$$

que era lo deseado.

- Para $m \geq 2$ basta aplicar el procedimiento anterior de manera inductiva.

Ejercicio 2 Pruebe que si Ω es acotado, entonces $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}^0(adh(\Omega))$.

demostración.-

($\supset$) Notemos que del hecho que Ω es acotado sigue que $adh(\Omega)$ es compacto y por lo tanto cualquier función continua en dicho conjunto es uniformemente continua y acotada, por ende es un elemento de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

($\subset$) Sea u una función uniformemente continua y acotada en Ω, debemos mostrar que posee una extensión continua al borde de Ω. Para ello sea $x \in \partial\Omega$ y $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de Ω que tiende a x, definimos

$$u(x) := \lim_{k\to\infty} u(x_k)$$

Debemos mostrar que la definición anterior es consistente, para ello consideremos otra sucesión $\{y_k\}$ que tiende a x, distinta de $\{x_k\}$ y veamos que en el límite $u(y_k)$ se comporta como $u(x_k)$. Sea $\varepsilon > 0$ entonces como u es uniformemente continua existe $\delta(\varepsilon/2)$ tal que

$$|x - y| \leq \delta(\varepsilon/2) \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $x_k - y_k \to 0$ sigue que existe $n(\varepsilon)$ tal que para todo $k \geq n(\varepsilon)$ se cumple que

$$|x_k - y_k| \leq \delta(\varepsilon/2)$$

y luego sigue que

$$|u(y_k) - u(x)| \leq |u(y_k) - u(x_k)| + |u(x_k) - u(x)| \leq \varepsilon. \tag{11}$$

para k suficientemente grande.

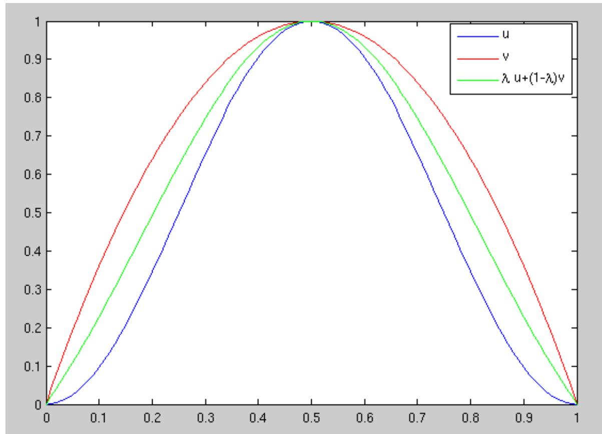

Figura 1: Contraejemplo de la Estricta Convexidad de E

1.2. Espacios $L^p(\Omega)$

Como ya se estudiaron en el curso de Medida e Integración no entraremos en detalles. Se recomienda revisar los aspectos relativos a la dualidad en espacios $L^p(\Omega)$ y el TCD.

1.3. Espacios ℓ^p

Denotemos $\mathbb{R}^N$ el espacio de todas las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, ie, de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 0}; x_n \in \mathbb{R}$. Se define

$$\|x\|_p := \left\{ \sum_{n\geq 0} |x_n|^p \right\}^{1/p} \quad , \quad | \leq p < +\infty$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$$

y

$$\|\ell^p\| = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\|_p < +\infty\}$$

se puede demostrar que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

2. Corolario 2 del Teorema de Hahn-Banach

Corolario 1 *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, sea $x_0 \in E$. Entonces existe $f_0 \in E'$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$$

Pretendemos mostrar que el elemento del corolario anterior no es necesariamente único. Sea $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$ y $E = \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Notemos que E no es estrictamente convexo, en efecto esto se puede apreciar de la figura 1.

Claramente $1 = \|u\| = \|v\| = \|\lambda u + (1-\lambda v)\|$. En $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, el elemento f_0 no es único. Por ejemplo, para $x \equiv 1$ se tiene

$$\begin{array}{rccc} f_0 : & \mathcal{C}(\overline{\Omega}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & x(0) \end{array} \Rightarrow \|f_0\| = 1 = \|x_0\|, \langle f_0, x_0\rangle = 1 = \|x_0\|^2$$

$$g_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\overline{\Omega}) & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_0^1 x dt \end{array} \Rightarrow \|g_0\| = 1 = \|x_0\|, \langle g_0, x_0 \rangle = 1 = \|x_0\|^2$$

3. Propiedades del Operador de Minkowski

Recordemos que para C subconjunto de un espacio vectorial convexo, abierto, no vacío que contiene a $0 \in C$, se define el operador de Minkowski para $x \in E$

$$p(x) = \text{ínf} \left\{ \alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$$

Ejercicio 3 Demuestre que $p(\cdot)$ posee las siguientes propiedades

i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \lambda > 0, \forall x \in E$

ii) $\exists M$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$

iii) $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$

demostración.-

Primero notemos que $p(x) < +\infty$, $\forall x \in E$ pues dado un elemento x de E existe $\alpha > 0$ tal que $\frac{1}{\alpha} x \in C$, pues C es convexo y $0 \in C = \mathring{C}$.

i) $p(\lambda x) = \text{ínf} \left\{ \alpha > 0 \mid \frac{x}{(\alpha/\lambda)} \in C \right\} = \text{ínf} \left\{ \lambda\beta = \alpha > 0 \mid \frac{x}{\beta} \in C \right\} = \lambda p(x)$

ii) Como $0 \in \mathring{C}$ sigue que existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset C$ y entonces para cualquier $x \neq 0$ se tiene

$$\frac{x}{\|x\|} r \in C \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{\|x\|}{r}\right)} \in C$$

y así para cualquier $\alpha \geq \frac{\|x\|}{r}$ sigue que $\frac{x}{\alpha} \in C$ y entonces $p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$, con lo que la propiedad es válidad para $M = \frac{1}{r}$.

iii) Si $p(x) < 1$, entonces existe $\alpha \leq 1$; $\frac{x}{\alpha} \in C$, pero

$$x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) 0 \in C$$

y de la convexidad se tiene que $x \in C$.

Inversamente, $\forall x \in C$, como $0 \in \mathring{C}$ se tiene

$$\forall \alpha > 1, \ \frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{ y entonces } p(x) < 1$$