Control 2, MA46B 2009/2
Tiempo 4:00 hrs.
Prof. Salomé Martínez
Prof. Aux. Adolfo Henríquez y Emilio Vilches

1. Para $t > 0$, considere la distribución $E_t = \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$ definida en $\mathbb{R}^N$.

   a) (0.2) Determine $\bar{\mathcal{F}}(E_t)$ en $\mathbb{R}$. Ind.: Considere la función $1_{[-t,t]}$.

   b) (0.2) Demuestre que en $\mathbb{R}^3$, se tiene $\bar{\mathcal{F}}(E_t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2t}\sigma_t$ donde σ_t es la medida superficial de densidad 1 de la esfera de radio t.

   c) (1.2) Pruebe que
   $$\bar{\mathcal{F}}(E_t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} 1_{\{|x| \leq t\}}$$
   en $\mathbb{R}^2$. Ind: utilice la parte anterior, expresando
   $$\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2t} \int_{|x|=t} e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\sigma_t,$$
   e identificando $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ con $(\xi_1, \xi_2, 0)$. Luego parametrice los hemisferios de la esfera usando $(x, y, \pm\sqrt{t^2 - x^2 - y^2})$ con $(x, y) \in B(0, t)$.

   d) (0.5) Resuelva
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta$$
   en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

   e) (0.5) Exprese la solución de
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ t > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
   $$u(0, x, y) = g(x, y), \quad u_t(0, x, y) = h(x, y),$$
   con $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

2. (1.0) Considere $C_0^k(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\ \lim_{|x|\to\infty} \partial^\alpha f(x) = 0, \text{para todo } |\alpha| \leq k\}$ dotada con la norma usual. Demuestre que si $H^s(\mathbb{R}^N) \subset C_0^k(\mathbb{R}^N)$ (con la inclusión continua), entonces $s > k + \frac{N}{2}$. Ind.: Considere los funcionales $\partial^\alpha\delta$.

3. *a)* (0.5) Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ Demuestre que:
   $$\varphi(\xi)\frac{e^{i\varepsilon\xi_1} - 1}{\varepsilon} \to i\xi_1\varphi(\xi) \text{ en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ cuando } \varepsilon \to 0,$$
   donde $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N)$. Ind.: Le será útil expresar en serie de potencias $e^{i\varepsilon\xi_1}$.

   b) (0.5) Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pruebe que
   $$\phi_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x + \varepsilon e_1) - \phi(x)}{\varepsilon} \to \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x) \text{ en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$
   Ind.: Tome transformada de Fourier y la parte anterior.

4. Definimos el peine de Dirac $P = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j$.

a) (0.2) Muestre que $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y que es periódica de periodo 1.

b) (0.2) Muestre que P es la derivada de la distribucin $E := \sum_{j\in\mathbb{Z}} F_j$, donde $F_j(x) = j1_{[j,j+1[}(x)$. Deduzca que P es una distribución temperada.

c) (0.2) Muestre que la transformada de Fourier $\hat{P}$ de P es periódica de periodo 1.

d) (0.2) Sea $u(x) = e^{2i\pi x}$. Muestre que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces $\langle u\hat{P}, \phi\rangle = \langle \hat{P}, \phi\rangle$.

e) (0.3) Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribución tal que $(u-1)T = 0$. Muestre que $T = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\delta_j$.

f) (0.2) Deduzca que $\hat{P} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\delta_j$ y $\forall j \in \mathbb{Z}$, $a_j = a$.

g) (0.2) Muestre que $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P$

Indicación: Considere la función $\phi(y) = e^{-\pi y^2}$.

h) (0.2) Deduzca la fórmula de Poisson: para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(j) = \sqrt{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(j).$$