

AUXILIAR 9: ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

PROFESOR : SALOMÉ MARTINEZ

AUXILIARES : ADOLFO HENRÍQUEZ & EMILIO VILCHES

5 de Noviembre

Problema 1.

Para $t \geq 0$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sea $T(t)f$ la solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{para } t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^N, \quad u(x, 0) = f \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

y denotamos por $T(t)$ también su extensión a $L^2(\mathbb{R}^N)$. Demuestre que si $|\alpha| = k$ entonces, existe una constante C que depende de k , tal que para $u(x, t) = [T(f)f](x)$ se tiene

$$\left\| \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2} \leq \frac{C}{t^{k/2}} \|f\|_{L^2},$$

para todo $t > 0$.

Problema 2.

Suponga que $(1 + |x|^2)f \in L^1(\mathbb{R})$ y $u(t)$ es la solución de la ecuación del calor. Expandiendo la transformada de Fourier de f en cero apropiadamente, encuentre una expansión asintótica para $u(t)$ cuyo error esté acotado por $Ct^{-(n+2)/2}$ con C una constante dependiendo de f .

Problema 3.

Considere

$$S(t)f = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}f \right),$$

el semigrupo asociado a la ecuación de Schrödinger.

1. Demuestre que para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $t \neq 0$ se tiene

$$S(t)g = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} g(y) dy.$$

2. Considere en $L^2(\mathbb{R}^n)$ la transformación

$$S_0(t)g = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4it}}}{(2it)^{n/2}} \mathcal{F}(g)(x/2t).$$

Demuestre que para cada $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $S_0(t)g = S(t) \left(e^{\frac{|x|^2}{4it}} g(x) \right)$

3. Pruebe que para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\left\| S(t) \left(\left(e^{\frac{|x|^2}{4it}} - 1 \right) g(x) \right) \right\|_{L^2} \leq \frac{C}{t}$$

con C dependiendo de g .

4. Pruebe que para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - S_0(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$