**Control 2, MA46B 2006/2**
**Prof. Salomé Martínez**
**Prof. Aux. Gonzalo Dávila**
**Tiempo: 4 hrs.**

1. *a*) Sea $f_k = 1_{[-k,k]} * 1_{[-1,1]}$. Calcule $f_k$ explícitamente y pruebe que $||f_k||_\infty = 2$.

   *b*) Pruebe que
$$\overline{\mathcal{F}}(f_k)(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx \sin x}{x^2}$$
   y que
$$||\overline{\mathcal{F}}(f_k)||_{L^1(\mathbb{R})} \to \infty,$$
   cuando $k \to \infty$. Hint.: Para calcular $\overline{\mathcal{F}}(f_k)$ use la formula de la convolución.

   *c*) Demuestre que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es un subespacio propio de $C_0(\mathbb{R})$. Hint.: Demuestre que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ es continua (recuerde que $C_0(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la norma $|| \cdot ||_\infty$). Concluya el resultado usando el Teorema de la aplicación abierta: *Sean $X, Y$ espacios de Banach y $L : X \to Y$ lineal, continua y sobreyectiva, entonces $\forall U \subset X$ abierto $L(U)$ es abierto.*

2. Sea
$$P = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$
   un operador diferencial a coeficientes constantes en $\mathbb{R}^N$. Sea $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ una solución fundamental de $P$ la cual es $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

   *a*) Sea $\varphi$ una función en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ no negativa tal que $\varphi \equiv 1$ en $B(0,1)$. Pruebe que $\psi = P(\varphi E) - \delta$ es $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Hint.: Utilice la regla de Leibnitz
$$\frac{\partial^\alpha (fg)}{\partial x^\alpha} = \sum_{\beta \le \alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^{\alpha-\beta} g}{\partial x^{\alpha-\beta}} \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}$$
   donde $\beta \le \alpha$ ssi $\beta_i \le \alpha_i$ para todo $i = 1, ..., N$, y $a_{\alpha\beta}$ son constantes.

   *b*) Pruebe que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ es una solución de $Pu = f$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ entonces $u$ es $C^\infty$. Hint.: Pruebe que $u = f * (\varphi E) - u * \psi$ y utilice la parte anterior.

3. *a*) Pruebe que existe $k \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tal que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |v(x)| \le C \left( \sum_{|\alpha|\le k} \left|\left| \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right|\right| \right)^{1/2}$$
   para todo $v \in S(\mathbb{R}^N)$.

   *b*) Sea $L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ un operador a coeficientes constantes de orden $m$, es decir $c_\alpha \neq 0$ para algún $|\alpha| = m$,tal que para constantes $M, R > 0$ se tiene que $L(\xi) \ge M|\xi|^m$ para todo $|\xi| > R$, donde $L(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \xi^\alpha$. Demuestre que existe una constante $C_1 > 0$ tal que para toda $v \in S(\mathbb{R}^N)$ se tiene que
$$||v||_{H^m(\mathbb{R}^N)} \le C_1 \left( ||Lu||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

4. *a*) Diremos que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ es homogenea de grado $\lambda$ si

$$< T, \varphi_t >= t^{-N+\lambda} < T, \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad t > 0,$$

donde $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$. Demuestre que la transformada de Fourier de una distribución temperada homogénea de grado $\lambda$ es homogénea de grado $-N - \lambda$.

*b*) Considere $f(x) = |x|^\lambda$ en $\mathbb{R}$ con $-1 < \lambda < -1/2$.

1) Pruebe que $\mathcal{F}(f)$ es una función. Hint.: Sea $u(x) = |x|^\lambda 1_{[-1,1]}$ y $v(x) = |x|^\lambda 1_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}$ entonces $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v)$. Pruebe que $\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}(u) \in C_0(\mathbb{R})$.

2) Pruebe que $\mathcal{F}(f)(\xi) = C|\xi|^{-(\lambda+1)}$ con $C$ constante. Hint.: Note que $f$ es homogenea de grado $\lambda$ y par.