EXAMEN MA46B 2008/2

Prof. Salomé Martínez

Prof. Aux. Manuel Larenas y Gustavo Navarro

Tiempo: 4 hrs.

(1) Sea

$$E(x) = \frac{|x|^{2-N}}{(2-N)\omega_N}$$

donde ω_N es la superficie de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$.

(a) Demuestre que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y que satisface $\Delta E = \delta$ en $\mathbb{R}^N$ para $N \geq 3$.

(b) Para $N \geq 3$ considere

$$S(x) = \frac{|x|^{4-N}}{2(4-N)(2-N)\omega_N} \quad N \neq 4, \quad S(x) = \frac{-\log|x|}{4\omega_4} \quad \text{si } N = 4.$$

Demuestre que $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y que satisface $\Delta^2 S = \delta$ en $\mathbb{R}^N$, donde $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$.

(2) Sea $s = \frac{1}{2}N + \alpha$, con $0 < \alpha < 1$. Nuestro propósito es probar que $H^s(\mathbb{R}^N) \subset C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ donde

$$C^\alpha(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^N) \ / \ \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}.$$

(a) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \neq y \in \mathbb{R}^N$ se tiene $||\delta_x - \delta_y||_{H^{-s}(\mathbb{R}^N)} \leq C|x-y|^\alpha$. Ind.: Recuerde que $\hat{\delta}_x(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-ix\cdot\xi}$. Para $R = |x-y|^{-1}$ exprese

$$||\delta_x - \delta_y||^2_{H^{-s}(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \left[\int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^{-s} |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| \, d\xi \right.$$

$$\left. + \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^{-s} |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| d\xi \right].$$

Utilice el teorema del valor medio para acotar la integral en $|\xi| \leq R$.

(b) Concluya el resultado.

(3) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ y $T > 0$. Sean c_{ij}, para $i, j = 1, 2$, funciones acotadas en $\bar{\Omega} \times [0, T]$ que satisfacen

$$c_{12} \geq 0, c_{21} \geq 0 \quad \text{en } [0, T] \times \Omega.$$

(a) Suponga que $u, v \in C^2((0, T] \times \Omega) \cap C^0([0, T] \times \bar{\Omega})$ satisfacen las desigualdades

$$\Delta u - \tfrac{\partial u}{\partial t} + c_{11}u + c_{12}v \quad > 0 \qquad (t, x) \in \ (0, T] \times \Omega, \quad (1)$$

$$\Delta v - \tfrac{\partial v}{\partial t} + c_{21}u + c_{22}v \quad > 0 \qquad (t, x) \in \ (0, T] \times \Omega,$$

Demuestre que si $u < 0$, $v < 0$ en $\{0\} \times \Omega \cup [0, T] \times \partial\Omega$, entonces $u, v < 0$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$.

(b) Suponga que $u, v \in C^2((0,T] \times \Omega) \cap C^0([0,T] \times \bar{\Omega})$ satisfacen las desigualdades

$$\Delta u - \tfrac{\partial u}{\partial t} + c_{11}u + c_{12}v \quad \geq 0 \qquad (t,x) \in \ (0,T] \times \Omega, \quad (2)$$

$$\Delta v - \tfrac{\partial v}{\partial t} + c_{21}u + c_{22}v \quad \geq 0 \qquad (t,x) \in \ (0,T] \times \Omega,$$

Demuestre que si $u \leq 0$, $v \leq 0$ en $\{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega$, entonces $u, v \leq 0$ para todo $(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}$.
Más aún pruebe que si $u(t_0, x_0) = 0$ para $x_0 \in \Omega$ y $0 < t_0 < 0$, entonces $u(t,x) \equiv 0$ para $0 \leq t \leq t_0$ y $x \in \bar{\Omega}$. Ind.: Para demostrar la primera afirmación considere $w = u - \varepsilon e^{\beta t}$, $z = v - \varepsilon e^{\beta t}$ con $\beta > 0$ apropiado para que w, z satisfagan (1) y aplique la parte anterior y tomando $\varepsilon \to 0$ concluya.

(c) Sea $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que satisfacen

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \geq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \geq 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2.$$

Suponga que $(u,v) \in [C^2((0,T] \times \Omega)]^2 \cap [C^0([0,T] \times \bar{\Omega})]^2$ es solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u,v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + g(u,v) \ \text{ en } \mathbb{R} \times \Omega.$$

Considere (u_1, v_1), (u_2, v_2) en $[C^2((0,T] \times \Omega)]^2 \cap [C^0([0,T] \times \bar{\Omega})]^2$ que satisfacen las desigualdades

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \leq \Delta u_1 + f(u_1, v_1), \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} \leq \Delta v_1 + g(u_1, v_1) \ \text{ en } \mathbb{R} \times \Omega,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \geq \Delta u_2 + f(u_2, v_2), \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} \geq \Delta v_2 + g(u_2, v_2) \ \text{ en } \mathbb{R} \times \Omega.$$

Pruebe que si $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$ en $\{0\} \times \Omega \cup \mathbb{R} \times \partial\Omega$, entonces $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$ en $\mathbb{R} \times \Omega$.