Control 3, MA46B 2008/2

Tiempo 4:00 hrs.

Prof. Salomé Martínez

Prof. Aux. Manuel Larenas y Gustavo Navarro

1. Para $t \geq 0$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sea $T(t)f$ la solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{para } t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^N, \quad u(x, 0) = f \text{ en } \mathbb{R}^N,$$

y denotamos por $T(t)$ también su extensión a $L^2(\mathbb{R}^N)$ (como vimos en clases). Demuestre que si $|\alpha| = k$ entonces, existe una constante C que depende de k , tal que para $u(x, t) = [T(t)f](x)$ se tiene

$$\left\| \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2} \leq \frac{C}{t^{k/2}} \|f\|_{L^2},$$

para todo $t > 0$. Ind.: Utilice la expresión para $T(t)f$ en términos de su transformada de Fourier.

2. Dado un conjunto $\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq k} \subseteq \mathbb{R}$, con $\alpha \in \mathbb{N}^N$ y $k \geq 2$, definimos el operador $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$. Diremos que L es elíptico si existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha \geq \lambda |\xi|^k \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

- a) Suponga que L es elíptico y $a_\alpha = 0$ para todo $|\alpha| < k$. Pruebe que $\mathcal{F}(Lu) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (i)^{|\alpha|} (\xi)^\alpha \mathcal{F}(u)(\xi)$ y demuestre que existe una constante $C > 0$, que depende de λ, k , tal que para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\|u\|_s \leq C(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}).$$

Ind: Recuerde que $(1 + |\xi|^2)^k \leq 2^k(1 + |\xi|^{2k})$.

- b) Sea $L_1(u) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} a_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$. Demuestre que existe una constante C_1 que depende de $\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq k-1}$, tal que para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\|L_1(u)\|_{s-k} \leq C_1 \|u\|_{s-1}.$$

- c) Suponga que $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ es elíptico. Demuestre que para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\|u\|_s \leq C(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}).$$

3. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, el cual supondremos por simplicidad contenido en $\{0 < x_1 < d\}$, $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$. Sea $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ una solución de la ecuación

$$\Delta u = f(x, u) \quad \text{en } \Omega,$$

que satisface $|u(x)| \leq M$ en $\bar{\Omega}$. Definimos $K = \|f\|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-M, M])}$. Nuestro propósito es demostrar que existe una constante C , que depende de M, K y Ω , tal que

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\nabla u(x)\| \leq \sup_{x \in \partial\Omega} \|\nabla u(x)\| + C.$$

- a) Pruebe que $\Delta u^2 \geq 2|\nabla u|^2 + 2uf(x, u)$ en Ω .

b) Demuestre que existe una constante B , dependiendo de M y K tal que

$$\Delta \|\nabla u\|^2 \geq 2 \sum_{k,i=1}^N \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right|^2 - B \|\nabla u\|^2 - B.$$

c) Demuestre que si β y α son elegidos apropiadamente, entonces

$$\Delta(\|\nabla u\|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \geq 0 \text{ en } \Omega.$$

d) Concluya el resultado.