Control 1, MA46B 2005/2
Tiempo 4:00 hrs.
Prof. Salomé Martínez
Prof. Aux. Manuel Larenas y Gustavo Navarro

1. Sea $u \in C^2([0,T] \times \quad)$ es una solución del problema de valor inicial $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = g(x)$ con $g : \quad \to \quad$ de clase C^2 decreciente. Sea $\gamma(t) = (t, x_0 + tg(x_0))$ la curva característica proyectada que pasa por $(0, x_0)$ y $p(t) = u_x(\gamma(t))$.

   a) (5 %) Demuestre que $p(t)$ satisface la ecuación $p'(t) + p^2(t) = 0$.

   b) (10 %) Concluya que $T < -1/\operatorname{ínf}_{x\in\ } g'(x)$.

2. Definimos el espacio

$$\mathcal{D}_\infty(\ ^N) = \{f \in C^\infty(\ ^N) \ / \ \partial^\alpha f \in L^\infty(\ ^N) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^N\}$$

   dotado de la topología inducida por la familia de seminormas

$$p_m(f) = \sup_{x\in\ ^N} \sum_{|\alpha|\le m} |\partial^\alpha f(x)| \quad \text{con } m \in \mathbb{N}.$$

   a) (15 %) Demuestre que $\mathcal{D}_\infty(\ ^N)$ es un espacio de Frechet.

   b) (15 %) Demuestre que $C_0^\infty(\ ^N)$ no es cerrado en $\mathcal{D}_\infty(\ ^N)$ y caracterice su clausura.

3. Considere $\Omega \subset \ ^N$ un abierto. Sea $u : \Omega \to \ ^N$ una función armónica, es decir satisface $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

   a) (5 %) Demuestre que si $B(x,r) \subset \Omega$ entonces

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)dy,$$

   donde $|B(x,r)|$ es el volumen de la bola. Ind. Recuerde que

$$u(x) = \frac{1}{r^{N-1}\omega_N} \int_{\partial B(x,r)} u(y)dS.$$

   b) (15 %) Demuestre que si $B(x,r) \subset \Omega$ entonces para todo $i = 1, ..., N$ se tiene

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|(x) \le \frac{C_N}{r} \sup_{y\in\partial B(x,r)} |u(y)|,$$

   donde C_N es una constante que depende solo de N. Ind.: Observe que si u es armónica, entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ también es armónica.

   c) (15 %) Sea $\psi : B(0,\delta) \to \quad$ una función en $\mathcal{D}(\ ^N)$ radial ($\psi(x) = \psi(|x|)$). Pruebe que si $B(x,\delta) \subset \Omega$ entonces

$$\int_{B(x,\delta)} \psi(y+x)u(y)dy = C_\psi u(x),$$

   con C_ψ solo dependiendo de ψ.

d) (10 %) Considere $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones armónicas, tal que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene que $< u_n, \varphi >$ converge cuando $n \to \infty$. Pruebe que para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $C > 0$ tal que $\sup_{x\in K} |u_n(x)| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) (10 %) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en (d), demuestre que existe una función armónica $u : \Omega \to$ tal que $u_n \to u$ en $\mathcal{E}(\Omega)$.