

Control 2, MA46B 2005/2

Tiempo 3:30 hrs.

Prof. Salomé Martínez

Prof. Aux. Manuel Larenas y Gustavo Navarro

1. Para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ se define la distribución $\check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ como

$$\langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle \quad \text{para toda } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

donde $\check{\phi}(x) \equiv \phi(-x)$.

- a) (5 %) Diremos que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ es par (impar) si $T = \check{T}$ ($\check{T} = -T$). Demuestre que si T es par entonces $\mathcal{F}(T)$ es par, y que si T es impar entonces $\mathcal{F}(T)$ es impar.
- b) (5 %) Pruebe que para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $\bar{\mathcal{F}}(T) = \mathcal{F}(\check{T})$.
- c) (10 %) Calcule $\mathcal{F}(H)$ donde $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es la función definida por $H(t) = 1$ si $t \geq 0$, $H(t) = 0$ si $t < 0$. Ind.: Puede utilizar que $\mathcal{F}\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -i\sqrt{2\pi}H + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- d) (20 %) Calcule $\mathcal{F}(x_+)$, $\mathcal{F}(x_-)$, $\mathcal{F}\left(Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.
2. El propósito de este ejercicio es entregar una demostración alternativa del teorema de Plancherel.

- a) (5 %) Demuestre que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

- b) (5 %) Considerando $\check{f}(x) = f(-x)$, demuestre que para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$f * \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

- c) (15 %) Demuestre que para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi,$$

y pruebe que \mathcal{F} se extiende como un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R}^N)$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

3. Considere el problema de valor inicial de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \text{ en } \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

con $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

- a) (15 %) Demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2(x, t) + \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(x)|^2 + |g(x)|^2 dx.$$

Ind. Le puede ser útil el teorema de Plancherel.

- b) (20 %) Encuentre la solución de (1) cuando $N = 1$ y $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ de (1) bajo estas condiciones.