

Tarea 1, MA46B 2005/2
Prof. Salomé Martínez
Prof. Aux. André De Laire, Hernán Castro y Claudio Muñoz

1. Probar que una distribución $T \in \mathcal{D}(\Omega)'$ es de orden p si y sólo si se puede extender a $\mathcal{D}^p(\Omega)$ como un funcional lineal continuo.
2. Defina la distribución $Pf(\tan x)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Demuestre que $\frac{dPf(\tan x)}{dx} = Pf(\sec^2 x)$.
3. Estudie la convergencia de $\{\sin(nx)/x\}_{n \in \mathbb{N}}$ y de $\{vp[\cos(nx)/x]\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$.

4. Definimos la distribución

$$\frac{1}{x + i0^+} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{x + \varepsilon i} \text{ en } \mathcal{D}(\mathbb{R})'.$$

Encuentre una relación entre esta distribución y $vp(1/x)$.

5. Sea la función

$$u(x, t) = \frac{H(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \text{ en } \mathbb{R}^2,$$

donde $H(t) = 1$ si $t > 0$, $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

6. Encuentre todas las distribuciones cuyos soportes sean $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^N$.

7. Sea $T_m = \sum_{k=0}^m e^{|x_k|^2} \delta_{x_k}$ donde $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en \mathbb{R}^N tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$$

y δ_y es la delta de Dirac en $y \in \mathbb{R}^N$.

Demuestre que $\{T_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y encuentre su límite. Además pruebe que la sucesión $\{T_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ no es convergente en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

8. Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, una distribución con soporte compacto K y orden m . Suponga que $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ satisface la siguiente propiedad:

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, tal que $|\alpha| \leq m$, y para cada $x \in K$, se tiene que $\partial^\alpha \varphi(x) = 0$.

Demuestre que $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Para ello defina, para $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N / d(x, K) \leq \varepsilon\}$, y pruebe lo siguiente:

a) Sea $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es tal que $\text{supp } \xi \subseteq B(0, 1)$ y $\int \xi(x) dx = 1$. Sea $\xi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ definida como

$$\xi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{K_{2\varepsilon}} \xi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

Demuestre que:

- i) Si $\varepsilon > 0$, entonces $\text{supp } \xi_\varepsilon \subseteq K_{3\varepsilon}$. Más aún, $\xi_\varepsilon \equiv 1$ en K_ε .
- ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$ se tiene que

$$\|\partial^\alpha \xi_\varepsilon\|^{(0)} \leq \|\xi\|^{(|\alpha|)} \beta_N \varepsilon^{-|\alpha|}$$

donde β_N es el volumen de la bola unitaria de \mathbb{R}^N y $\|f\|^{(k)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$.

b) Demuestre que $\langle T, \varphi \rangle = 0$, donde φ cumple la propiedad enunciada al comienzo.

9. Sea $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ un operador diferencial a coeficientes constantes en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

a) Sea Ω_1 abierto acotado de Ω , se define

$$E = \{u \in L^2(\Omega_1) : Pu = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega_1)\}$$

Muestre que E es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega_1)$

b) Supongamos que P verifica la siguiente propiedad:

$$\forall \omega \text{ abierto en } \Omega \text{ si } Pu = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(\omega), \text{ entonces } u \in \mathcal{C}^\infty(\omega)$$

Ahora, sea $\Omega_2 \subset \subset \Omega_1$. Muestre que existe una constante $C > 0$ tal que $\forall u \in E$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega_1)}$$

Hint: Pruebe usando el Teorema del Grafo Cerrado que la aplicación $u \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_j}$ definida de E en $L^2(\Omega_2)$ es continua.

10. Encuentre la descomposición en Serie de Fourier de la distribución $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$ donde $\langle \delta_{kT}, \varphi \rangle = \varphi(kT)$.

11. Ejercicios 14 y 15 del apunte (pag 66).