## Teorema de Gauss-Green

**Definición 1.** (i) Si $\partial\Omega$ es $C^1$, entonces a lo largo de $\partial\Omega$ está bien definida la normal exterior unitaria

$$\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n).$$

la normal exterior unitaria en un punto $x^0 \in \partial\Omega$ es $\nu(x^0) = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$.

(ii) Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Llamamos a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot Du$$

la derivada normal(exterior) de $u$.

En esta subsección asumiremos que $\Omega$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y que $\partial\Omega$ es $C^1$.

**Teorema 2 (Gauss Green).** Sea $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\nu_i dS \quad i = 1, \ldots, n.$$

**Teorema 3 (integración por partes).** Sean $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\nu_i dS \quad i = 1, \ldots, n.$$

**Teorema 4 (Fórmulas de Green).** Sean $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces

1. $\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS$,
2. $\int_\Omega Dv \cdot Du dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS$,
3. $\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS$.

## Coordenadas Polares

Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(r, \theta_1, \ldots, \theta_n) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times \cdots (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, por las fórmulas

$$\begin{aligned} x_1 =& r\cos\theta_1 \\ x_2 =& r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_{n-1} =& r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n =& r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $dx = r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}\cdots\sin\theta_{n-2} dr d\theta$. Escribiremos abreviadamente $x = r\cdot\omega$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, y se tiene que $|\omega| = 1$, que significa que $\omega$ pertenece a la esfera unitaria $S^{n-1}$. Entonces $dx = r^{n-1} dr d\omega$ donde $d\omega$ es la medida sobre $S^{n-1}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\cdot\omega) r^{n-1} dr d\omega$$

**Teorema 5.** 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua e integrable. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f dx = \int\limits_0^\infty \left( \int_{\partial B(x_0,r)} f dS \right) dr$$

para cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

2. En particular

$$\frac{d}{dr}\left( \int_{B(x_0,r)} f dx \right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f dS$$

para cada $r > 0$.