Auxiliar 3: Ecuaciones de la física matemática

Profesor : Salomé Martinez
Auxiliares : Adolfo Henríquez & Emilio Vilches
20 de Agosto

Problema 1.
Mostrar que las siguientes aplicaciones son distribuciones

1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \langle \mathrm{pf}\frac{1}{x^2}, \phi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon}\right]$
2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \langle \mathrm{pf}\frac{H}{x^2}, \phi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\phi(x)}{x^2}dx - \frac{\phi(0)}{\varepsilon} + \phi'(0)\log\epsilon\right]$
3. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \langle \mathrm{vp}\left(\frac{H}{x}\right), \phi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\phi(x)}{x}dx + \phi(0)\log\epsilon\right]$

Problema 2.
Demostrar que la fórmula

$$\langle T, \phi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi^{(n)}(n)$$

define un elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Demuestre que T no tiene orden finito.
Indicación: Puede razonar por el absurdo y considerar $\phi(x) = \psi(\lambda(x-(m+1)))$, donde $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$, ψ_0 define una función de $\mathcal{D}(]-1/2,1/2[)$, igual a 1 sobre $[-1/4,1/4]$, y $\lambda > 1$).

Problema 3 (Integrales singulares).
Sea u una función continua sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$u(tx) = t^{-n}u(x) \quad t>0, x\neq 0 \tag{1}$$

1. Mostrar que

$$\langle \mathrm{T}, \phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon} u(x)\phi(x)dx \tag{2}$$

   existe para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\int\limits_{|\omega|=1} u(w)d\omega = 0 \tag{3}$$

2. Suponiendo (3), demostrar que (2) define una distribución sobre $\mathbb{R}^n$.