AUXILIAR 2: ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

PROFESOR : SALOMÉ MARTINEZ

AUXILIARES : ADOLFO HENRÍQUEZ & EMILIO VILCHES

13 de Agosto

1. Preliminares

Teorema 1. Un e.v.t X es normable si y sólo si X es localmente convexo y localmente acotado.

Teorema 2. Sea X un e.v.t. localmente acotado. Si X tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.

2. Problemas

Problema 1.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio. Construya explícitamente una sucesión $\{K_n\}$ de compactos de Ω tal que $K_n \subseteq K_{n+1}$ y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega.$$

Se dice que la sucesión $\{K_n\}$ *agota* a Ω .

Problema 2.

Considere $\{K_n\}$ como en el problema anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las seminormas

$$p_n: C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto p_n(f) := \max_{x \in K_n, |\alpha| \leq n} \{|D^\alpha f(x)|\}$$

las cuales definen una topología τ localmente convexa en $C^\infty(\Omega)$. Más aún, una base local para esta topología está dada por los conjuntos

$$V_n = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid p_n(f) < \frac{1}{n}\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1. Demuestre que $(C^\infty(\Omega), \tau)$ es metrizable.
2. Demuestre que para cada $x \in \Omega$, el funcional $\delta_x: f \mapsto f(x)$ es continuo con la topología τ .
3. Pruebe que el subespacio

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{sop}(f) \subseteq K\}$$

es cerrado en $(C^\infty(\Omega), \tau)$.

4. Pruebe que $\text{int } \mathcal{D}_{K_n} = \emptyset$.
5. Pruebe que $\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega)$ son espacios de Fréchet.
6. Demuestre que $(C^\infty(\Omega), \tau)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.
7. Demuestre que $(C^\infty(\Omega), \tau)$ no es normable.
8. Demuestre que $D(\Omega)$ no es metrizable.

Problema 3.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos

$$\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t}$$

1. Mostrar que $\varphi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ para $t \neq 0$.
2. Probar que cuando t tiende a cero φ_t converge en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a una función ψ . Calcular ψ .

3. Ejercicios

Ejercicio 1.

Considere la siguiente función:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

1. Pruebe que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ con $\text{sop}(\phi) = \overline{B}(0, 1)$.
2. Sea $c = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) dx$. Para cada $\varepsilon \in (0, 1]$ defina $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^N} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Verifique lo siguiente:
 - a) $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$;
 - b) $\text{sop}(\rho_\varepsilon(x)) = \overline{B}(0, \varepsilon)$; y
 - c) $\rho_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Una familia que satisface 1), 2) y 3) se dice una *familia regularizante*.

3. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un compacto y $\varepsilon > 0$. Defina $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, K) \leq \varepsilon/3\}$ y $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, K) \geq 2\varepsilon/3\}$. Verifique que la función

$$v_\varepsilon = \frac{d(x, U_\varepsilon)}{d(x, U_\varepsilon) + d(x, K_\varepsilon)}$$

es continua y satisface

$$v_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } x \in U_\varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Ejercicio 2.

Sean K_n una sucesión de compactos que *agota* a Ω . Para cada n tome $\eta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\eta_n(x) = 1$ para todo $x \in K_n$. Dada $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ pruebe que $\{\eta_n \phi\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ que aproxima a ϕ en la topología de $\mathcal{E}(\Omega)$. Concluya que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{E}(\Omega)$.