Control 1: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Profesores Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

7 de Octubre del 2009

P1. Sea $(X_n : n \in \mathbb{N})$ una cadena de Markov con conjunto de estados I numerable, y sea P matriz su matriz de transición. Para $f : I \to \mathbb{R}$ positiva considere,

$$Pf(i) := \sum_{k \in I} p_{ik} f(k) = \mathbb{E}_i(f(X_1)), \quad i \in I.$$

Para $F \subseteq I$ defina $T_F = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n \in F\}$.

a) Demuestre que $f(i) := \mathbb{E}_i(T_F)$ es solución de la ecuación

$$v(i) = \begin{cases} 0 & x \in F \\ 1 + Pv(i) & x \notin F \end{cases}$$

b) Para una cadena de Markov a valores en $I = \{0, .., n\}$ y matriz de transición P dada por

$$P_{ij} = \begin{cases} p & 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i+1 \\ 1-p & 0 \leq i \leq n-1, \quad j = 0 \\ 0 & 0 \leq i \leq n-1, \quad j \notin \{0, i+1\} \end{cases}$$

$$P_{nn} = 1.$$

Considere $F = \{n\}$. Calcule $\mathbb{E}_0(T_F)$.

P2. Sea $(X_n : n \in \mathbb{N})$ una cadena de Markov a valores en I, con matriz de transición P. Asuma que $p_{ii} < 1$ para todo $i \in I$. Defina recursivamente:

$$T_0 = 0, \quad T_l = \text{ínf}\{n > T_{l-1} : X_n \neq X_{T_{l-1}}\} \text{ si } l \geq 1.$$

a) Calcule la distribución de T_1 cuando $X_0 = i_0$.

b) Pruebe que los tiempos aleatorios T_l son finitos $\mathbb{P}-$ c.s. y son tiempos de parada con respecto a $\mathcal{B}^n = \sigma(X_s : s \leq n)$, $n \geq 0$.

c) Muestre que $(Y_l := X_{T_l} : l \geq 0)$ es una cadena de Markov con matriz de transición $Q = (q_{ij} : i, j \in I)$ dada por

$$q_{ij} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}.$$

d) Pruebe que si $(X_n : n \in \mathbb{N})$ tiene distribución estacionaria $\pi = (\pi_i : i \in I)$ entonces $(Y_l : l \geq 0)$ tiene distribución estacionaria $\nu = (\nu_i : i \in I)$ dada por $\nu_i = C(1 - p_{ii})\pi_i$ para $i \in I$, donde $C > 0$ es el factor de normalización.

P3. (En esta pregunta mostraremos que dada cualquier matriz estocástica irreducible finita P, existe una cadena de Markov -que no es la canónica-, que la tiene como matriz de transición y que partiendo de cualquier $i_0 \in I$ fijo alcanza su distribución estacionaria en un número finito de pasos con probabilidad 1).

Sea $P = (p_{ij} : i, j \in I)$ una matriz estocástica irreducible finita (I es finito) que es estrictamente positiva ($p_{ij} > 0$ para todo $i, j \in I$). Sea $\pi = (\pi_i : i \in I)$ su distribución estacionaria. Sea

$$0 < \theta < \text{mín}\left\{ \frac{p_{ij}}{\pi_j} : i, j \in I \right\}.$$

Ahora considere $Q = (q_{ij} : i, j \in I)$ tal que

$$p_{ij} = \theta\pi_j + (1-\theta)q_{ij}\,, \quad i, j \in I.$$

a) Pruebe que $\theta < 1$ y que Q es una matriz estocástica.

- Para cada $i \in I$, considere una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $Y^{(i)} = (Y_n^{(i)} : n \geq 1)$ a valores en I con distribución $q_{i\bullet}$, es decir $\mathbb{P}(Y_n^{(i)} = j) = q_{ij}$ para todo $j \in I$.
- Sea $U = (U_n : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución π, es decir $\mathbb{P}(U_n = i) = \pi_i$ para $i \in I$.
- Sea $Z = (Z_n : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de Bernoulli de parámetro θ, es decir $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \theta = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$
- Sea X_0 una variable aleatoria a valores en I.
- Suponga que las sucesiones de variables aleatorias $Y^{(i)}$, $i \in I$, U, Z y la variable aleatoria X_0 son todas independientes entre sí.

El espacio de probabilidad será el que contenga a las sucesiones de variables aleatorias $Y^{(i)}$, $i \in I$, U, Z y a la variable aleatoria X_0.

Como X_0 está dada, defina la sucesión las variables aleatorias $(X_n : n \geq 1)$ por la fórmula de inducción siguiente:

$$\mathbf{1}_{X_{n+1}=j} = Z_{n+1}\mathbf{1}_{U_{n+1}=j} + (1 - Z_{n+1})\mathbf{1}_{Y_{n+1}^{(X_n)}=j}\,, \quad n \geq 0\,,$$

es decir

$$\{X_{n+1} = j\} = \{Z_{n+1} = 1, U_{n+1} = j\} \cup \bigcup_{k\in I}\{Z_{n+1} = 0, X_n = k, Y_{n+1}^{(k)} = j\}\,, \quad n \geq 0\,.$$

b) Pruebe que $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = p_{ij}$ para todo $i, j \in I$.

c) Muestre que $(X_n : n \in \mathbb{N})$ así definida es una cadena de Markov (que por la parte anterior tiene matriz de transición P).

d) Sea $T = \text{ínf}\{n \geq 1 : Z_n = 1\}$. Pruebe que T es finito *c.s.* con distribución geométrica θ (es decir $\mathbb{P}(T = m) = \theta(1-\theta)^{m-1}$ para $m \geq 1$) y que X_T tiene distribución π donde $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

Tiempo 4 horas, 30 minutos. Todos los problemas tiene el mismo valor y cada parte al interior de cada problema tiene el mismo valor.