

Control 2: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Profesores Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

7 de Octubre del 2009

Pregunta 1. Sea $(N(t) : t \geq 0)$ un proceso de Poisson de parámetro λ . Sean $t > 0$ y $s \in (0, t)$.

1a. Pruebe que se cumple:

$$\mathbb{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

(es decir: dado $N(t)$ se tiene $N(s) \sim \text{Binomial}(N(t), \frac{s}{t})$).

1b. Sea Calcule $\mathbb{E}(N(t) \mid N(s))$ y concluya que la variable aleatoria $M(t) = N(t) - \lambda t$ es una martingala, es decir que verifica: $\mathbb{E}(M(t) \mid M(s)) = M(s)$.

Hint: Puede usar que un proceso de Poisson $(N(t) : t \geq 0)$ es un proceso de renovación en equilibrio.

Pregunta 2. Sea F concentrada en $\mathbb{R}_+$, no-aritmética y tal que su media es finita, es decir $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$. Considere el proceso de renovación asociado $(N(t) : t \geq 0)$ y sea $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$. Asuma que F tiene segundo momento finito, luego $\sigma^2 < \infty$ donde $\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \mu)^2 dF(x)$.

El objetivo de este problema es mostrar la igualdad siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(m(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}. \quad (1)$$

Para ello siga el camino siguiente:

2a. Pruebe que

$$\mathbb{E}(S_{N(t)+1} - t) = \mu m(t) - t + \mu.$$

Hint: Puede usar Wald.

2b. Pruebe que $H(t) = \mu m(t) - t + \mu$ verifica:

$$H(t) = a(t) + \int_0^t a(t-z) dm(z) \text{ con } a(t) = \int_t^\infty (x-t) dF(x).$$

2c. Concluya la fórmula (1).

Pregunta 3. Sea $(N_i : i \geq 0)$ un proceso de renovación, con tiempos entre renovaciones dados por las variables aleatorias i.i.d. $(X_i : i \geq 1)$ cuya media μ es finita. Sea $(Y_i : i \geq 1)$ otra familia de variables aleatorias i.i.d. tal que $\forall i \geq 1, Y_i \leq X_i$ c.s. y además Y_i es independiente de $(X_j : j \neq i)$. Denote por G la distribución de Y_1 , y por ν su media la que tambien suponemos finita.

Para todo $t \geq 0$ definamos la variable aleatoria

$$W_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \text{ tal que } t \in S_i + Y_i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

i.e., $W_t = 1 \Leftrightarrow t$ está cubierto por algún Y . Defina $q(t) = \mathbb{P}(W_t = 1)$.

Pruebe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \frac{\nu}{\mu}$$

(i.e., asintóticamente, una fracción ν/μ del tiempo es cubierto por los Y_i).

Hint: Plantee una ecuación tipo renovación para la función $q(t)$.

Tiempo 4 horas, 30 minutos. Todos los problemas tiene el mismo valor y cada parte al interior de cada problema tiene el mismo valor.