Clase Auxiliar N°14: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

11 de noviembre del 2009

P1. The PASTA property (Poisson Arrivals see time averages)

Sea $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ cadena de Markov a tiempo continuo(homogénea) con distribución estacionaria π. (es decir, si denotamos $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = i|X(0) = j)$ entonces $\forall t \geq 0$ $P^T(t)\pi = \pi$. Sea $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ proceso de Poisson independiente de X_t, y de intensidad λ. Suponga que tomamos muestras de la cadena X en los instantes donde se producen los saltos de N, es decir consideramos el conjunto de v.a. $Y_n = X(T_n)$ donde T_n es el momento del $n-$ésimo salto de N.

a) Demuestre que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de markov

b) Calcule las probabilidades de transición asociadas a $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Demuestre que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la misma distribución estacionaria π

P2. Paseos aleatorios a tiempo continuo

Considere $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ el paseo aleatorio simple en $\mathbb{Z}$ a tiempo continuo, es decir

$$\mathbb{P}(X(t+h) = i+1|X(t) = i) = \mathbb{P}(X(t+h) = i-1|X(t) = i) = \frac{\lambda h}{2} + o(h)$$

. Deseamos encontrar la distribución del tiempo T usado en una excursión desde el origen. Para esto seguiremos el siguiente esquema

a) Demuestre que la cadena es recurrente

b) Denotemos $\alpha = \frac{1}{2|m|}$ con $m \in \mathbb{Z}$. Demuestre que la probabilidad de que en una excursión se pase al menos una vez por el punto m es α. Más generalmente, si N es la cantidad de veces que se visita a m durante la excursión, demuestre que $\forall\ k \geq 1 \mathbb{P}(N \geq k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$

c) Demuestre que $\mathbb{E}(e^{\theta T}) = (1-\alpha) + \alpha\dfrac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda - \theta}$

d) Concluya

P3. Procesos de nacimiento y muerte Considere el proceso de nacimiento y muerte lineal, i.e $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$. Denotemos $\nu(t) = \mathbb{P}(X(t) = 0|X(0) = 1)$

a) Demuestre que $\nu(t)$ satisface la EDO

$$\nu\prime(t) + (\lambda+\mu)\nu(t) = \mu + \lambda\Psi(t), \quad \nu(0) = 0 \quad \Psi(t) = \mathbb{P}(X(t) = 0|X(0) = 2)$$

b) Considere los procesos de nacimiento y muerte lineal independientes $(X_1(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$,$(X_2(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ con $X_1(0) = X_2(0) = 1$. Demuestre que $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ definido por $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$ es un proceso de nacimiento y muerte lineal con $Z(0) = 2$

c) Concluya que $\Psi(t) = \nu(t)^2$

d) Calcule $\nu(t)$ para distintos valores de μ, λ