MA44C Procesos de Markov. Semestre 2009-02
Profesor: Servet Martínez **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Gonzalo Mena

Clase auxiliar Extra

25 de Noviembre de 2009

Pregunta 1 (*Cola M—M—1)* Considere una cola donde existe sólo un servidor. Suponga que las llegadas son un proceso de Poisson de tasa λ, y las atenciones son otro proceso de Poisson, indep del anterior, de tasa μ. Suponga $\lambda < \mu$
i) Modele el proceso como uno de nacimiento y muerte indicando sus parámetros
ii) Pruebe que la distribución estacionaria se distribuye $\sim \text{Geom}(\alpha)$, encontrando el valor de α.
iii) Siempre en el caso estacionario, pruebe que el tiempo total desde la llegada de un cliente hasta que ya fue atendido se distribuye $\exp(\theta)$, y encuentre θ.

Pregunta 2 *(Cola M—M—∞)* En el mismo contexto anterior, suponga ahora que existen infinitos servidores (este puede ser, por ejemplo, el caso de una central telefónica). Sin suponer ninguna relación entre λ y μ:
i) Modele el proceso como uno de nacimiento y muerte indicando sus parámetros
ii) Pruebe que la distribución estacionaria es una variable aleatoria de Poisson y encuentre su parámetro
iii) Sea $\psi(s,t) = \sum_{n\geq 0} p_n(t)s^n$, la función generadora de momentos de la variable aleatoria X_t que indica la cantidad de personas en la cola al momento t. Pruebe que ψ verifica la EDP:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-s)(-\lambda\psi + \mu\frac{\partial \psi}{\partial s})$$

y concluya que $\phi(s,t) = e^{-\lambda(1-s)\frac{1-exp(-\mu t)}{\mu}}(1-(1-s)e^{-\mu t})^{i_0}$, suponiendo que la cola parte con i_0.