Tarea 3 Procesos de Markov Primavera 2009

Profesor: Servet Martínez, Profesores Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

1.- Sean $\lambda > 0$, $\mu > 0$, considere la matriz $Q = (q_{ij} : i, j \in \{1, 2\})$ dada por

$$q_{12} = \mu = -q_{11}, \quad q_{21} = \lambda = -q_{22}$$

Como el conjunto de estados es finito. el semigrupo Markoviano asociado verifica ($P(t) = e^{Qt} : t \geq 0$). Además notelo como es habitual $P(t) = (p_{ij}(t) : i, j \in \{1, 2\})$.

(a) Pruebe que para $t > 0$ se tiene

$$p'_{11}(t) = -\mu p_{11}(t) + \lambda p_{12}(t), \quad p'_{22}(t) = -\lambda p_{22}(t) + \mu p_{21}(t)$$

Usando que $(p_{ij}(t) : i, j \in \{1, 2\})$ es matriz Markoviana, deduzca que

$$p_{11}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}(\lambda + \mu e^{-(\lambda + \mu)t}), \quad p_{22}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}(\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}).$$

(b) Sea $\alpha \in (0, 1)$, considere la matriz de Markov $R = (r_{ij} : i, j \in \{1, 2\})$ dada por

$$r_{11} = \alpha = r_{22}, \quad r_{12} = 1 - \alpha = r_{21}$$

Pruebe que existe un semigrupo Markoviano ($P(t) : t \geq 0$) con estados $\{1, 2\}$ tal que $P(1) = R$ si y solo si $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

2.- Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de Poisson, y defina

$$X_t = (-1)^{N_t}$$

(a) Pruebe que $(X_t : t \geq 0)$ es una cadena de Markov a tiempo continuo, es decir que verifica:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n)$$

para $0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$; $i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in \{-1, 1\}$.

(b) Calcule el semigrupo de transición $P(t)$ dado por

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) \quad i, j \in \{-1, 1\}, t \geq 0.$$

pruebe que es standard, y calcule la matriz de derivadas en 0^+ del semigrupo: $Q = (q_{ij} : i, j \in \{-1, 1\})$.

3.- (a) Como preliminares al ejercicio le pedimos lo siguiente:

(a1) Sea Y v.a. tal que $Y \sim \exp(\lambda)$, es decir Y tiene densidad $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{y \geq 0}$. Sea $\theta > 0$, calcule $\mathbb{E}(e^{-\theta Y})$.

(a2) Sea S una v.a. a valores ≥ 0 con densidad f_S . Sea F_S su función de distribución. Pruebe que $\int_0^\infty e^{-\theta t} F_S(t) dt = \frac{1}{\theta} \mathbb{E}(e^{-\theta S})$ para $\theta > 0$.

Asuma que $\lambda_i > 0$ para todo $i \geq 0$. Considere el proceso de nacimiento puro $(N_t : t \geq 0)$ con tasas de nacimiento $(\lambda_i : i \geq 0)$, partiendo de $N_0 = 0$.

Note $S_0 = 0$ y $S_n = \inf\{t \geq 0 : N_t = n\}$ para $n \geq 1$. Recuerde que las variables aleatorias de permanencia en n , dada por $T_n = S_{n+1} - S_n$, $n = 0, 1, \dots$, son exponenciales independientes.

Note $p_n(t) = \mathbb{P}_0(N_t = n) = \mathbb{P}_0(N_t \geq n) - \mathbb{P}_0(N_t \geq n+1)$.

(b) Sea $\widehat{p}_n(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} p_n(t) dt$. Pruebe que

$$\widehat{p}_n(\theta) = \frac{1}{\lambda_n} \prod_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \theta}.$$

(c) Pruebe que S_n tiene densidad de probabilidad f_{S_n} dada por $\lambda_{n-1} p_{n-1}(t)$.

De ahora en adelante suponga que $\lambda_i \neq \lambda_j$ cuando $i \neq j$.

(d) Pruebe que

$$\widehat{p}_n(\theta) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \theta} \quad \text{donde} \quad a_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Hint: Como los polos de $\widehat{p}_n(\theta)$ son simples puede hacer $\lim_{\theta \rightarrow -\lambda_i} ((\lambda_i + \theta) \times \text{Expresion})$ en las expresiones (A) y (B) para probar su igualdad.

(e) Tomando transformada inversa, y como esta respeta a la suma concluya que:

$$p_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$$

Nota: Los problemas 1.- y 2.- valen 3/10 cada uno, y el problema 3.- vale 4/10. Cada parte (a), (b),... de los problemas vale lo mismo al interior del problema.