

Clase Auxiliar N°13: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

2 de noviembre del 2009

P1. Más sobre procesos de Poisson

- a) Sean $(N_1(t) : t \geq 0)$, $(N_2(t) : t \geq 0)$ dos procesos de Poisson independientes, de parámetros λ_1, λ_2 . Demuestre que $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$ (en particular, es un proceso de renovación)
- b) Sean $(N_1(t) : t \geq 0)$, $(N_2(t) : t \geq 0)$ dos procesos de renovación independientes, con la misma distribución F (no aritmética) y media $\mu < \infty$. Supongamos $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de renovación. Demuestre que N_1, N_2, N son procesos de Poisson
- c) Sea $(N_1(t) : t \geq 0)$ proceso de Poisson de parámetro λ_1 y $(N_2(t) : t \geq 0)$ un proceso de renovación independiente de N_1 , con distribución G y media $\mu < \infty$. Demuestre que si $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de renovación entonces N_2 es un proceso de Poisson

P2. Considere un proceso de renovación $N(t)$ dado por una sucesión $(X_n : n \geq 1)$ con $X_n \sim F$ con $F(0^-) = 0$, $F(0) < 1$. Supondremos que en el instante de cada renovación S_n se recibe una recompensa R_n , para $n \geq 1$. Suponga que $(R_n : n \geq 1)$ son i.i.d. Defina la v.a.

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i.$$

que es la recompensa total recibida hasta t . Notemos $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\nu = \mathbb{E}(R_1)$.

Suponga $\mu, \nu < \infty$

- a) Muestre que

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}(t)) = (m(t) + 1)\nu - \mathbb{E}(R_{N(t)+1})$$

- b) Pruebe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{R}(t)}{t} = \frac{\nu}{\mu} \quad \mathbb{P} - c.s.$$

Indicación: Recuerde el teorema fuerte de los grandes números: Si $(Y_n : n \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d, con $\mathbb{E}(Y_n) < \infty$ entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \rightarrow \mu \quad \mathbb{P} - c.s.$$

- c) Considere una compañía de seguros que ofrece el siguiente producto: Cada vez que un cliente sufre un accidente debe pagarle una cierta cantidad aleatoria. La compañía recibe ingresos debido al pago de la prima de los contratos. Sean entonces $(X_n : n \geq 1)$ i.i.d con media $\mu < \infty$ los momentos en que ocurren los accidentes y $(R_n : n \geq 1)$ i.i.d con media $\nu < \infty$ las cantidades cobradas cada vez que ocurre un accidente. Los ingresos de la compañía en el instante t serán ct con $c > 0$.

Encuentre una relación entre c, ν, μ de manera de asegurar que siempre a partir de un determinado momento la compañía mantendrá un balance positivo (es decir, los ingresos superarán al total de las cantidades cobradas)

P3. Considere un proceso de renovación dado por $(X_n : n \geq 1)$ i.i.d. con $X_1 \sim F$, siendo F no aritmética con media μ finita. Sea $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ la vida residual, que sabemos tiene distribución asintótica dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R(t) \leq x) = H(x) \text{ con } H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(t) dt.$$

Para una distribución G en $\mathbb{R}_+$ denote por $m_k(G) = \int_0^\infty x^k dG(x)$ su k -ésimo momento. De ahora en adelante asuma que para cierto $k \geq 1$ fijo se tiene $m_{k+1}(F) < \infty$.

a) sea k tal que $m_{k+1}(F) < \infty$. Pruebe que

$$m_k(H) = \frac{m_{k+1}(F)}{(k+1)\mu}.$$