Clase Auxiliar N°11: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

21 de octubre del 2009

P1. De la paradoja de la inspección

a) Encuentre las distribuciones de la vida residual y edad cuando $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

b) Propuesto: Calcule explícitamente $\mathbb{P}(X_{N(t)+1} \geq x)$

P2. Procesos de renovación alternantes

Considere un sistema que puede estar en dos estados, on(0) y off(1). Inicialmente está en 0 y permanece en ese estado por un tiempo Z_1, a partir de ese momento pasa al estado 1 y permanece en ese estado durante un tiempo Y_1. Luego permanece en el estado 0 por un tiempo Z_2 y así sucesivamente. Suponemos que los vectores $(Z_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son i.i.d. Permitimos sin embargo que haya dependencia entre Z_n e Y_n. Supongamos $Z_n \sim H$, $Y_n \sim G$, $Z_n + Y_n \sim F$. Suponemos además que F es no aritmética. Sea W_t la v.a. que dice en qué estado se encuentra el sistema en el instante t y $p(t) = \mathbb{P}(W_t = 0)$

a) Muestre que si $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ son medibles, $0 < A < 1$ y F, G, son funciones de distribución con $F(0^-) = G(0^-) = 0$ y

$$F(s) = A + \int_0^s g(t)dG(t) \quad \text{si } s \geq 0$$

entonces

$$\int_0^t f(s)dF(s) = Af(0) + \int_0^t g(s)f(s)dG(s) \quad \text{si } t \geq 0$$

b) Pruebe que $\mathbb{P}(S_{N(t)} = y) = \bar{F}(t-y)\mu_m(y)$ con $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$

c) Puebe que $\mathbb{P}(W_t = 0 | S_{N(t)} = y) = \dfrac{\bar{H}(t-y)}{\bar{F}(t-y)}$

d) Demuestre que $p(t) = \bar{H}(t) + \displaystyle\int_0^t \bar{H}(t-y)dm(y)$

e) Concluya que $\lim_{t\to\infty} p(t) = \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n) + \mathbb{E}(Y_n)}$

Recuerdo: $\mathbb{P}(S_{N(t)} \leq s) = \bar{F}(t) + \displaystyle\int_0^s \bar{F}(t-y)dm(y)$

P3. Valor esperado asintótico de la vida residual

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim F$ proceso de renovación con F no aritmética. Sea $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$ la vida residual en el tiempo t. Supongamos $X_n \in L^2(\mathbb{P})$, $\mu = \mathbb{E}(X_n)$.

a) Demuestre que $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(Y(t)) = \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{2\mu}$

b) Concluya que $\lim_{t\to\infty} m(t) - \frac{t}{\mu} = \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{2\mu^2} - 1$