Tarea 2, Procesos de Markov **Primavera 2009**

Profesor: Servet Martínez, Profesores Auxiliares: Andrés Fielbaum - Gonzalo Mena

1.- *(Otra manera de construir un Proceso de Poisson)* Considere una sucesión de variables aleatorias $(Z_n : n \geq 1)$ i.i.d. con $Z_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda > 0$.

Para cada $i \geq 0$ considere la sucesión de variables aleatorias $(Y_k^{(i)} : k \geq 1)$ i.i.d. con $Y_k^{(i)} \sim \text{Uniforme}[i, i+1]$. Además estas sucesiones son independientes entre sí (para los diferentes $i \geq 0$) y son independientes de $(Z_n : n \geq 1)$.

Ahora considere la variable aleatoria

$$N_t = \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} Z_n + \sum_{k=1}^{Z_{\lceil t \rceil}} \mathbf{1}_{Y_k^{(\lfloor t \rfloor)} \leq t} \, .$$

Pruebe que $N(t)$ es un proceso de Poisson de parametro λ, es decir (dado que evidentemente $N(0) = 0$ y que $N(t)$ crece con $t \geq 0$) debe probar que $N(t)$ es a incrementos independientes y estacionarios y que $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

Hint 1: Use que si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes tal que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ entonces $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Hint 2: Puede usar, después de probarlo, que si $(X_i : i \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ y M es una variable aleatoria independiente de $(X_i : i \geq 1)$ con $M \sim \text{Poisson}(\nu)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{M} X_i \sim \text{Poisson}(\theta \, \nu)$$

2.- Muestre que los proceso de Poisson (es decir los procesos de renovación definidos por una distribución exponencial) son los únicos procesos de renovación $(N(t) : t \geq 0)$ definidos por una distribución no aritmética F, en que la vida residual $R_t = S_{N(t)+1} - t$ y la edad $E_t = t - S_{N(t)}$ son independientes para todo $t \geq 0$. Para ello, le sugerimos:

2.a.- Primero muestre que un proceso de Poisson verifica la propiedad.

2.b.- Suponga ahora que un proceso $(N(t) : t \geq 0)$ verifica la propiedad. Pruebe que en este caso se cumple

$$\mathbb{P}\{E_t \geq y\}\mathbb{P}\{R_t \geq x\} = \mathbb{P}\{R_{t-y} \geq x + y\} \text{ para } x, y \geq 0.$$

2.c.- Tome $t \to \infty$ y pruebe el resultado.

3.- 3.a.-Sea $L > 0$ una cantidad fija. Sea $\lambda > 0$. Sea $(X_n : n \geq 0)$ una sucesión de variables aleatorias independientes igualmente distribuídas según una exponencial de media $1/\lambda$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, y considere $N_t = \sup\{n : S_n \leq t\}$ el proceso de renovación asociado que en este caso es un proceso de Poisson de tasa λ.

Considere la sucesión (aleatoria) dada por:

$$T_1 = S_1\,, \quad T_{k+1} = \text{ínf}\{S_n : S_n \geq T_k + L\}$$

Pruebe que $(T_k : k \geq 1)$ son los instantes de renovación de un proceso de renovación generalizado dado por una secuencia de variables aleatorias independientes $(Y_n : n \geq 1)$. Calcule la ley de Y_1 y calcule la ley (común) de Y_i para $i \geq 2$.

3.b.- Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de renovación cuyos instantes de renovación son dados por $(S_n : n \geq 1)$. Sea F^{*n} la distribución de S_n.

Sea $p \in (0,1)$ y defina $q = 1 - p$. Considere $(Z_n : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes distribuídas según una Bernoulli(p), es decir $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) = q$.

Suponga que cada instante de renovación es guardado con probabilidad p, es decir considere el siguiente proceso

$$M_t = \text{cardinal}(A_n) \;\text{ donde }\; A_n = \{n \geq 1 : S_n \leq t/p, Z_n = 1\}\,.$$

Pruebe que $(M_t : t \geq 0)$ es un proceso de renovación, generado por una secuencia de variables aleatorias indepndientes idénticamente distribuídas según una distribución F_p dada por

$$F_p(x) = \sum_{r\geq 1} pq^{r-1} F^{*r}\left(\frac{x}{p}\right)\,,$$

es decir si $(Y_j : j \geq 1)$ son i.i.d. con $Y_j \sim F_p$ entonces el proceso de renovación asociado se distribuye como $(M_t : t \geq 0)$.