

Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Matemática

## Auxiliar Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Gonzalo Mena, Andrés Fielbaum

**Pregunta 1.** Sea  $(N_t : t \geq 0)$  un proceso de renovación, con variables aleatorias  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  asociadas. Suponga que  $\mathbb{E}(X_1^{r+1}) < \infty$ , donde  $r > 0$  es un real. Defina  $\gamma_t = S_{N_t+1} - t$  la vida residual. Encuentre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\gamma_t^r)$$

**Pregunta 2.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. a valores en  $\mathbb{N}$ . Sea  $a_1, \dots, a_k$  una secuencia fija de números naturales (que llamaremos *el patrón*). Queremos estudiar con qué frecuencia asintótica aparece el patrón en la sucesión  $X_1, X_2, \dots$ . Formalmente, diremos que el patrón apareció en el instante  $p$  ssi  $X_{p-k+1} = a_1, \dots, X_p = a_k$  (observe que con esta definición, dos apariciones del patrón pueden intersectar).

(i) Defina  $N_n = \text{cardinal}\{p \leq n : \text{el patrón apareció en el instante } p\}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $t \geq 0$ , defina  $N_t = N_{\lfloor t \rfloor}$ . Pruebe que  $(N_t : t \geq 0)$  es un proceso de renovación generalizado.

(ii) Note que lo que buscamos es  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t}$ . Usando los teoremas del curso, determine el valor de tal límite.

**Pregunta 3.** Sea  $N_t^D$  un proceso de renovación generalizado, tal que  $X_1 \sim G, X_i \sim F \forall i \geq 2$ .

(i) Pruebe que  $m_D$  satisface la ecuación  $m_D = G + m * G$ , donde  $m$  es la función de renovación asociada al proceso no generalizado en que todas las variables se distribuyen según  $F$ .

(ii) Concluya que  $m_D = G + m_D * F$ . ¿Puede sacar conclusiones sobre el comportamiento asintótico de  $m_D$ ?

**Pregunta 4.** Sea  $N$  un proceso de renovación en que los tiempos entre eventos son uniformes en  $[0, 1]$ . Encuentre  $m_t$  y  $v_t = \text{Var}(N_t)$ .