

Auxiliar MA44C: Procesos de Poisson

Profesor: Servet Martínez, Auxiliares: Andrés Fielbaum y Gonzalo Mena

P1 Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de Poisson de tasa λ . Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e independientes de N , todas Bernoulli de parámetro p . Defina $M_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$.

i) Pruebe que $(M_t : t \geq 0)$ es un proceso de Poisson de parámetro $p\lambda$. Muestre además que $W_t = N_t - M_t$ es independiente de M_t .

ii) Lo anterior se puede interpretar como que en nuestro proceso de conteo, existen dos tipos de llegadas, y lo que probamos es que el proceso de llegadas de cada uno de estos tipos es un proceso de Poisson, independientes entre sí. Ahora suponga que de estos dos tipos de llegadas, sólo uno es “observable”, i.e., sólo conocemos M_t , y nos gustaría entonces estimar N_t (este podría ser el contexto natural para, por ejemplo, emisiones radioactivas, donde existen emisiones que son detectadas y otras que no). Calcule entonces $\mathbb{E}(N_t | M_t)$.

P2 Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de Poisson de tasa λ . Pruebe que $\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda$ c.s.

P3 Sea $N = (N_t : t \geq 0)$ un *proceso de Poisson con intensidad variable*, i.e., una secuencia de variables aleatorias que verifican:

1. $N_0 = 0$ c.s.
2. $\forall 0 \leq s \leq t, N_t - N_s$ toma valores en los naturales, con $\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{1}{k!} (\int_s^t \lambda(u) du)^k e^{-\int_s^t \lambda(u) du}$, donde $\lambda : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ es una función medible e integrable en compactos.
3. N es a incrementos independientes.

Sea $(S_n)_n$ la secuencia de saltos del proceso, i.e., $S_n = \inf\{t : N_t \leq n\}$. Denote por f_n la función de densidad de S_n . Pruebe que $\sum_{n \geq 1} f_n(t) = \lambda(t)$. Demuestre además que $\mathbb{P}(S_n < \infty) = 1 \Leftrightarrow \int_0^\infty \lambda(u) du = \infty$.

P4 Sea $N = (N_t : t \geq 0)$ un proceso de Poisson de intensidad λ .

i) Sea $0 \leq s < t$ Calcule $\mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 1)$.

ii) Deduzca la ley conjunta de (S_1, S_2)