Clase Auxiliar N°9: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

23 de septiembre del 2009

P1. Para la cadena de ramificación consideremos el caso en que la cantidad de descendientes de un individuo Y se distribuye según p_k, con $p_0 + p_2 = 1$ Calcule la probabilidad de extinción en función de p_0, p_2

P2. Consideremos la siguiente cadena de Markov que podría ser usado para modelar una cola: Sea $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, con $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ La matriz de transición es $P_{0,k} = p_k$ $k \geq 0$ y

$$P_{n,k} = \begin{cases} p_{k-n+1} & \text{si } k \geq n-1 \\ 0 & k < n-1 \end{cases}$$

a) Muestre que para cada $k \in \mathbb{N}$ $\exists k' > k$ tal que $0 \to k'$. Muestre además que la cadena es irreducible

b) Sean $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k x^k$ y $m = \mathbb{E}(X_1)$. Muestre que la ecuación $\varphi(x) = x$ tiene una única solución en $]0,1[$ si y sólo si $m > 1$

c) Encuentre los valores de $u \in]0,1[$ en los que se tiene que la función $f(n) = u^n$ satisface la relación $(Pf)(n) = f(n)$ $\forall n > 0$

d) Sea $\tau_k = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n = k\}$. Muestre que $\forall k \geq 1, r \geq 0, n \geq 0$ se cumple $\mathbb{P}_{k+r}(\tau_k = n) = \mathbb{P}_r(\tau_0 = n)$ y deduzca $\mathbb{P}_{k+r}(\tau_k < \infty) = \mathbb{P}_r(\tau_0 < \infty)$, $\mathbb{E}_{k+r}(\tau_k) = \mathbb{E}_r(\tau_0)$

e) Muestre que $\mathbb{P}_{k+r}$-c.s $\tau_0 = \tau_r + \tau_0 \circ \theta_{\tau_r}$ en $\{\tau_0 < \infty\}$.

f) Deduzca que $\mathbb{P}_{k+r}(\tau_0 < \infty) = \mathbb{P}_r(\tau_0 < \infty)\mathbb{P}_k(\tau_0 < \infty)$ y que $\mathbb{P}_k(\tau_0 < \infty) = \mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty)^k$

g) Supongamos que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = 1$. Muestre que $\mathbb{E}_k(\tau_o) = k\mathbb{E}_1(\tau_0)$