Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Mena, Andrés Fielbaum

Pregunta 1
Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de nacimiento y muerte, i.e., la cadena de Markov con matriz de transición dada por:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j|>1 \\ p_i & \text{si } j=i+1 \\ r_i & \text{si } j=i \\ q_i & \text{si } j=i-1 \end{cases}$$

Asumiremos que $p_i > 0 \forall i, q_i > 0 \forall i$. La auxiliar pasada se probó que la cadena es recurrente si y solamente sí $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{q_k}{p_k}=\infty$. Demostrar que es recurrente positiva ssi $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{p_k}{q_{k+1}}<\infty$. ¿Que sucede si $p_i = p, q_i = q \forall i$?.

Pregunta 2
Sea a un vector de probabilidad sobre $\mathbb{N}$, que verifica $|\{n : a_n > 0\}| = \infty$, y sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov a valores en $\mathbb{N}$, con matriz de transición P dada por:

$$P_{0,j} = a_j, P_{i,i} = r, P_{i,i-1} = 1-r \;\forall i \geq 1$$

Supondremos que $r \in (0,1)$.
(i) Pruebe que la cadena es irreducible y recurrente.
(ii) Defina $\varphi(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$, la función generadora de momentos de a. Recuerde que $\varphi'(1) = \mathbb{E}(a)$ (abusando de notación). Notemos $\mu = \mathbb{E}(a)$. Probaremos que la cadena es recurrente positiva ssi $\mu < \infty$. Para ello, sea π un vector positivo de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y defina $G(z) = \sum_{j\geq 0}\pi_j z^j$. Pruebe entonces que

$$\pi^T P = \pi^T \Leftrightarrow G(z) = \pi_0\left(\frac{z\varphi(z) - (1-r+zr)}{(1-r)(z-1)}\right)$$

(iii) Concluya que la cadena es recurrente positiva ssi $\mu < \infty$.

Pregunta 3
Sea $(X_n)_n$ cadena de Markov irreducible, y sea P su matriz de transición. Suponga que P es idempotente, es decir, $P^2 = P$. Pruebe que $\forall i, j P_{ij} = P_{jj}$ y que la cadena es aperiódica.

Pregunta 4 *(La urna de Ehrenfest)*
Considere N partículas en una caja que está dividida en 2 secciones que se comunican entre sí. En cada turno, se elige uniformemente e independientemente de los otros turnos una partícula al azar, y se cambia de sección.
(i) Defina $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cadena de Markov que indica cuántas partículas hay en la sección 1. Encuentre la matriz de transición P. Estudie irreducibilidad, periodicidad y recurrencia de la cadena.
(ii) Encuentre la distribución estacionaria de la cadena (¿Por qué existe y es única?).