Clase Auxiliar N°7: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

1 de septiembre del 2009

P1. Recordemos que un estado i se dice no esencial si $\exists j \in I$ tal que $i \to j$ pero $j \nrightarrow i$.

a) Demuestre que si $i \to j$, con $i \neq j$ entonces $\mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) > 0$

b) Demuestre que si i es no esencial entonces i es transiente.

c) Sea $I = \{0, 1, ...n\}$ y $0 < p < 1$ Considere la cadena con matriz de transición

d) Sean $i \neq j$. Demuestre que $\mathbb{P}_i(N_j = \infty) = \mathbb{P}_i(\tau_j < \infty)\mathbb{P}_j(N_j = \infty)$

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ 1-p & j = 0 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1, \text{ y } P_{nn} = 1$$

Clasifique los estados de la cadena. Demuestre que dado cualquier n, con probabilidad 1 se necesita una cantidad finita de lanzamientos de moneda (cargada) para obtener n caras consecutivas.

e) Demuestre que $d(i) = mcd\{n > 0 \ : f_{ii}^{(n)} > 0\}$

P2. Cadenas de nacimiento y muerte
En este caso $I = \mathbb{N}$ y la matriz de transición es

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ p_i & \text{si } j = i+1 \\ r_i & \text{si } j = i \\ q_i & \text{si } j = i-1 \end{cases} \quad \text{con } p_i + q_i + r_i = 1, q_0 = p_{-1} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$$

.

a) Asumamos que $p_i > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}, q_i > 0 \ \forall i \geq 1$. Demuestre que la cadena es irreducible y es de período 2 si $\forall i \in \mathbb{N} \ r_i = 0$, y de lo contrario es de periodo 1.

b) Demuestre que la cadena es recurrente ssi $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{r} \frac{q_l}{p_l} = \infty$

P3. Ó la tragedia del "El astronauta ebrio"
Consideremos el paseo aleatorio simétrico en $I = \mathbb{Z}^3$. Es decir, la matriz de transición es la siguiente:

$$P_{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } |\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}| = 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Demuestre que el paseo es irreducible de periodo 2 y transiente.

Indicación Puede ser útil usar la fórmula de Stirling, que dice $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$ y que si a_n, b_n son dos sucesiones positivas tales que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ entonces para cualquier sucesión positiva c_n se tiene $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n c_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n c_n < \infty$