

Tarea 1 Procesos de Markov Primavera 2009

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andrés Fielbaum - Gonzalo Mena

25 de agosto

P1. Hagamos las siguientes definiciones:

- $i \in I$ es no-esencial si $\exists j \in I$ tal que $i \rightarrow j$ y $j \nrightarrow i$. Si i no es no-esencial, se dice que i es esencial.
- $J \subseteq I$ es un conjunto cerrado si $\forall i \in J$ se tiene $\sum_{j \in J} p_{ij} = 1$. El conjunto cerrado J es minimal si no contiene un subconjunto estricto que sea cerrado
- a) Pruebe que ser esencial es propiedad de clase, es decir si i es esencial y $j \in C(i)$ entonces j es esencial.
- b) Pruebe que si i es esencial entonces $C(i)$ es un cerrado minimal.

P2. Definamos:

$$\forall i, j \in I : l_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i \{ \tau_j = n, n < \tau_i \}, \tau_i = \inf \{ n > 0 : X_n = i \}$$

$$\forall |z| < 1 : L_{ij}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} l_{ij}^{(n)} z^n, \quad P_{ij}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{ij}^{(n)} z^n$$

Pruebe que si $i \neq j$ se tiene que $P_{ij}(z) = P_{ii}(z)L_{ij}(z)$ para todo $|z| < 1$

P3. a) Pruebe que para $i, j \in I, i \neq j$, se tiene

$$\mathbb{E}_i(N_j) = \mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) \mathbb{E}_j(N_j).$$

- b) Asuma que i es recurrente. Pruebe que para $j \neq i$ se tiene que $\mathbb{E}_i(N_j)$ toma sólo los valores 0 ó $+\infty$. Describa en términos de $j \in C(i)$ ó $j \notin C(i)$ cuando toma cada cual de estos valores y muéstrello.

P4. Sea $p = (p_j : j \geq 1)$ un vector de probabilidad en $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ tal que $\{j : p_j > 0\}$ es un conjunto infinito, siendo 1 su máximo común divisor. Sea $(Y_i : i \geq 0)$ una secuencia de variables aleatorias independientes con $Y_n \sim p$ para $n \geq 1$, e Y_0 tomando valores en $\mathbb{N}$.

Defina $Z_n = \sum_{i=0}^n Y_i$ para $n \geq 0$. Observe que Z_n es finito y que $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty$. Ahora defina

$$V_n = \inf \{ Z_m - n : m \geq 0 \text{ tal que } Z_m > n \} \quad \text{para } n \geq 0$$

- a) Pruebe que $(V_n : n \geq 0)$ es una cadena de Markov a valores en $\mathbb{N}^*$ con matriz de transición $P = (p_{ij} : i, j \geq 1)$ dada por $p_{1j} = p_j$ para cada $j \geq 1$ y $p_{j,j-1} = 1$ para $j \geq 2$.
- b) Pruebe que $(V_n : n \geq 0)$ es irreducible, aperiódica y recurrente.
- c) Definamos τ_i de la misma forma que en la **P2**.

1) Fije $k \geq 2$. Calcule $\mathbb{E}_1 \left(\sum_{n=0}^{\tau_1-1} 1_{V_n=k} \right)$

2) Fije $j \geq 2$ y $k \geq 1$ tal que $k \neq j$. Calcule $\mathbb{E}_j \left(\sum_{n=0}^{\tau_j-1} 1_{V_n=k} \right)$

P5. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias que verifican la siguiente propiedad:
 $\forall n \geq k, \forall i_{n+1}, i_n, \dots, i_0 \in I, \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{n+1-k} = i_{n+1-k})$.

Definimos ahora la secuencia de vectores aleatorios Z_n a valores en I^k , con $Z_n = (X_{n-k+1}, \dots, X_n)$.
 Pruebe que $(Z_n)_n$ es cadena de Markov y encuentre su matriz de transición.

P6. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible y recurrente. Sea $J \subseteq I, J \neq \emptyset$. Definamos la siguiente sucesión de tiempos de parada:

$$\sigma_1 = \inf\{n > 0 : X_n \in J\} \quad \text{y} \quad \forall k \geq 2 \quad \sigma_k = \inf\{n > \sigma_{k-1} : X_n \in J\}$$

- a) Justifique que los σ_k son efectivamente tiempos de parada y que son finitos c.s.
- b) Demuestre que la sucesión de v.a. $(Y_n)_{n \geq 1}$ definida por $Y_n = X_{\sigma_n}$ es cadena de Markov