Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Mena, Andrés Fielbaum

Pregunta 1

(i) Considere el paseo aleatorio simple en $\mathbb{Z}$, i.e., la cadena de Markov definida sobre los enteros y tal que su matriz de transición P verifica $\forall i \in \mathbb{Z}, P_{i,i+1} = 1 - P_{i,i-1} = p \in (0,1)$. Pruebe que la cadena es recurrente ssi $p = \frac{1}{2}$.

(ii) Considere ahora el paseo aleatorio y simétrico simple en $\mathbb{Z}^2$, i.e., de cada punto se puede pasar a cualquiera de sus 4 vecinos con probabilidad $\frac{1}{4}$. Pruebe que la cadena es recurrente.

Hint: Recuerde la fórmula de Stirling: $\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{1}{12n}}$

Pregunta 2

Un tipo quiere completar un álbum que tiene N láminas. Compra láminas de a una cada vez, siendo cada vez independiente y distribuida en forma uniforme entre las N láminas. Defina la variable aleatoria T como el total de láminas que debe comprar hasta ganar. Pruebe que $\mathbb{E}(T) = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

Pregunta 3

Sea $(G, +)$ un grupo finito, sean $(X_k)_{k\geq 0}$ v.a.'s i.i.d. a valores en G, $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. La auxiliar pasada se probó que $(S_n)_n$ es una cadena de Markov. Notemos por ν la distribución de X_1, y sea $H = \{g \in G : \nu(g) > 0\}$. Pruebe que la cadena es irreducible $\Leftrightarrow < H >= G$, donde $< H >$ denota al subgrupo generado por H.

Pregunta 4

Considere ahora el grupo $(\mathbb{Z}_n, F)$, y el paseo aleatorio simple en $\mathbb{Z}_n$ (es decir, que se mueve a cada vecino con probabilidad $\frac{1}{2}$), partiendo desde 0. Esta cadena de Markov puede verse también como un paseo aleatorio en el grafo cíclico de n nodos. Defina $\tau = \text{ínf}\{k \in \mathbb{N} : \forall i = 0, ..., n-1, \exists j \leq k \text{ tq } X_j = i\}$ (i.e., el primer tiempo en el que recorrí todo el grafo).

(i) Pruebe que τ es tiempo de parada, y que $\tau < \infty$ c.s.

(ii) Defina $W = X_\tau$. Pruebe que W se distribuye uniformemente en el conjunto $\{1, ..., n-1\}$.

Obs: Lovász y Winkler (1993) demostraron que los únicos grafos para los que se tiene esta propiedad son los ciclos y los grafos completos.