Auxiliar Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Gonzalo Mena, Andrés Fielbaum

Pregunta 1

Sea T tiempo de parada. Pruebe las siguientes propiedades:

(i) Sea $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces X es $\mathcal{B}_T$ -medible ssi $\exists (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con h_n medible respecto a $\mathcal{B}_n$, tal que $h = \sum_n h_n 1_{\{T=n\}}$.

(ii) Si X es una v.a. integrable, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_T) = \sum_n \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_n) 1_{\{T=n\}}$.

Pregunta 2

(i) Sean $(G, +)$ grupo numerable, y sean $(Z_n)_{n \geq 1}$ secuencia de variables aleatorias i.i.d. a valores en G . Defina $S_n = g + \sum_{k=1}^n Z_k$. Pruebe que S_n es cadena de Markov y encuentre su matriz de transición.

(ii) Suponga ahora que dos jugadores, A y B, juegan un juego por turnos, donde A parte con j fichas, y B parte con $N - j$ fichas. En cada turno, A le gana una ficha a B con probabilidad p , y B le gana una ficha a A con probabilidad $1 - p$, siendo cada turno independiente entre sí. Gana el jugador que deja sin fichas a su contrincante. Calcule la probabilidad de que A gane el juego.

Pregunta 3

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias que verifican la siguiente propiedad:

$\forall n \geq k, \forall i_{n+1}, i_n, \dots, i_0 \in I, \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{n+1-k} = i_{n+1-k})$.

Definimos ahora la secuencia de vectores aleatorios Z_n a valores en I^k , con $Z_n = (X_{n-k+1}, \dots, X_n)$. Pruebe que $(Z_n)_n$ es cadena de Markov y encuentre su matriz de transición.