Clase Auxiliar N°3: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

11 de agosto del 2009

P1. Tiempos de parada
Sean S, T tiempos de parada. Demuestre que

a) $\{S < T\}, \{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

b) $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$ si $S \leq T$

c) Si S_n tiempo de parada, entonces $\inf S_n, \sup S_n$ son tiempos de parada

d) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

P2. Tiempos de parada y operador traslación Sea I numerable y sean para todo $n \in \mathbb{N}$ $X_n : I^{\mathbb{N}} \to I$ las proyecciones canónicas. Consideramos el espacio medible canónico , es decir $\big(I^{\mathbb{N}}, \sigma(X_k, k \geq 0)\big)$. Sean S, T tiempos de parada con respecto a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, 0 \leq 0 \geq n)$

a) Muestre que para cualquier entero positivo k, $k + T \circ \theta_k$ es tiempo de parada

b) Muestre que $\rho = S + T \circ \theta_S$ es tiempo de parada (con la convención $\rho = \infty$ si $S = \infty$). Muestre además que si S, T son finitos, $X_T \circ \theta_S = X_\rho$

c) Para $A \subseteq I$ definimos $T_A(\omega) = \inf\{n \geq 0 \ X_n(w) \in A\}$, $S_A(\omega) = \inf\{n \geq 1 \ X_n(w) \in A\}$, que son tiempos de parada. Sea υ otro tiempo de parada. Demuestre que

$$\upsilon + T_A \circ \theta_\upsilon = inf\{n \geq \upsilon \ X_n \in A\}$$

$$\upsilon + S_A \circ \theta_\upsilon = inf\{n > \upsilon \ X_n \in A\}$$

y que si $A \subseteq B$ entonces $T_A = T_B + T_A \circ \theta_{T_B}$

P3. Martingalas y Cadenas de Markov
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{F}$ una sucesión creciente de $\sigma-$álgebras.

Definición. *Decimos que la familia $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a.'s a valores reales es una martingala si*

- *X_n es F_n medible y $X_n \in L^1$*
- $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

Notemos que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Definamos $Pf(i) := \sum_{j \in I} P_{ij} f(j)$. Demuestre que $Pf(i) = \mathbb{E}_i(f(X_1))$

b) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ secuencia de variables aleatorias en I numerable. Sea P matriz estocástica. Demuestre que $(X_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov con matriz de transición P si y sólo si $\forall\ f : I \to \mathbb{R}$ medible y acotada

$$f(X_n) - f(X_0) - \sum_{j=0}^{n-1} (P - I) f(X_j)$$

es martingala con respecto a la familia $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0 ... X_n)$

c) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ martingala y T tiempo de parada. Demuestre que $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ es martingala.

d) Supongamos que $T < \infty$ c.s. Supongamos además que $|X_{T\wedge n}| < C$ para cierto $C > 0$, y para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Demuestre que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$

e) (Ruina del jugador) Consideremos el paseo aleatorio $X_0 = 0$, $X_n = Y_1 + ..Y_n$ con Y_i i.i.d y $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ calcule la probabilidad de que $(X_n)_{n\geq 0}$ alcance $-a$ antes que b