Clase Auxiliar N°3: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

5 de agosto del 2009

P1. Algunas propiedades sencillas

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a valores en I numerable.

a) Demuestre que la propiedad de Markov es equivalente a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_l \in J_l \subseteq I, l \in (0, ..n-1)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

b) Demuestre que la propiedad de Markov es equivalente a

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1} ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n)$$

c) Concluya que la propiedad de Markov es equivalente a

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ...X_{t_0} = i_0) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n)$$

con $0 \leq t_0 < t_1 ... < t_n$

P2. Construcción de cadenas de Markov

a) Sea E numerable, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $(\mathcal{S}, \Sigma)$ espacio medible. Sean $(Y_n)_{n\geq 0}$ variables aleatorias i.i.d a valores en $(\mathcal{S}, \Sigma)$. Sea $\Phi : E \times \mathcal{S} \to E$ medible y consideramos la secuencia $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aleatorias definida como:

$$X_n = \begin{cases} x \in E & n = 0 \\ \Phi(X_{n-1}, Y_n) & n > 0 \end{cases}$$

Demuestre que $(X_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov y determine su matriz de transición.

b) Sea μ vector de probabilidad y $P = (p_{i,j})_{(i,j)\geq 0}$ matriz de transición en $E = 0, ..., m$ o $E = \mathbb{N}$. Definamos $t_0 = 0$, $t_1 = \mu(0)$ y

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(k) \qquad n \in E$$

y para cada $i \in E, s_0^{(i)} = 0, s_1^{(i)} = p_{i,0}$ y

$$s_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,k} \qquad n \in E$$

Definamos también

$$\Psi(x) = k \quad \text{si} \quad x \in [t_k, t_{k+1}[\quad \Psi(1) = 1$$

$$g(i, x) = k \quad \text{si} \quad x \in [s_k^{(i)}, s_{k+1}^{(i)}[, \quad g(i, 1) = 1$$

Sean $(U_n)_{n\geq 0}$ independientes y uniformemente distribuidas en [0,1]. Definimos

$$X_0 = \Psi(U_0), \quad X_n = g(X_n, U_{n+1})$$

Pruebe que $(X_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial μ

P3. Algunos ejemplos de Cadenas de Markov

a) Paseo aleatorio
Sean $(X_n)_{n\geq 0}$ v.a.'s i.i.d con $\mathbb{P}(X_i = j) = a_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $(S_n)_{n\geq 0}$ definido por

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

es una cadena de Markov con matriz de transición $P_{i,j} = a_{j-i}$.

b) Valores record
Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.'s i.i.d tal que $\mathbb{P}(X_i = j) = \alpha_j$, $j \geq 0$. Diremos que un record ocurre en el tiempo n si $X_n \geq \max(X_1, ..., X_{n-1})$, donde $X_0 = -\infty$, y si un record ocurre en el tiempo n llamamos X_n el valor record. Denotemos por R_i al $i-$ésimo valor record. Demuestre que $(R_i)_{i\geq 0}$ es una cadena de Markov y calcule su matriz de transición.