Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Convolución de Medidas

Definición: Sean μ_1, μ_2 dos medidas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Definimos la *medida convolución* $\mu_1 * \mu_2$ por $\mu_1 * \mu_2(A) = \mu_1 \otimes \mu_2(\{(x,y) : x + y \in A\})$.

Propiedades:

- Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mu_1 * \mu_2)$, entonces $\int f d\mu_1 * \mu_2 = \int \int f(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y)$
- $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$
- Si $\nu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son medidas, $\nu * \sum_n \mu_n = \sum_n \nu * \mu_n$
- $\mu_1 * (r\mu_2) = r\mu_1 * \mu_2$
- δ_0 es el neutro
- $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

Convolución y Medidas de Lebesgue-Stieljes

Sean F, G crecientes, continuas a la derecha. Supongamos además $F(-\infty) = 0$.
Luego $\mu_F * \mu_G(-\infty, b] = \int_{\mathbb{R}} F(b-x) dG(x)$.

Esto motiva la siguiente definición: Si $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, y G una función creciente continua a la derecha, se define $A * G(t) = \int A(t-x) dG(x)$ (cuando esté bien definida). Notar que aquí es la convolución de una función con una medida.

Con esto, en el contexto inicial, $\mu_F * \mu_G = \mu_{F*G}$ (en particular si F, G son distribuciones de probabilidad).
En este contexto, el neutro es H_0 (la función de Heavyside).

Convolución y Medidas Absolutamente Continuas

Propiedad: Notemos por λ la medida de Lebesgue, suponga $\mu_1 << \lambda$. Entonces $\mu_1 * \mu_2 << \lambda$, con $\frac{d\mu_1 * \mu_2}{d\lambda}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu_1}{d\lambda}(z-y) d\mu_2(y)$. Si además $\mu_2 << \lambda$, entonces $\frac{d\mu_1 * \mu_2}{d\lambda} = \frac{d\mu_1}{d\lambda} * \frac{d\mu_2}{d\lambda}$ (siendo esta última convolución la convolución usual de funciones integrables).

Convolución de Medidas Atómicas

Suponga $\mu_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \delta_{x_n}$, $\mu_2 = \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m \delta_{y_m}$. Entonces $\mu_1 * \mu_2 = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} a_n b_m \delta_{x_n + y_m}$.

En particular, si μ_1, μ_2 se soportan en $\mathbb{Z}$, entonces $\mu_1 * \mu_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_{k-n} \delta_k$ (la convolución discreta).

Aplicaciones a las Probabilidades

Suponga $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Sean X, Y variables aleatorias independendientes. Entonces $X + Y$ se distribuye según $F_X * F_Y$ (con la convolución definida para medidas de Lebesgue-Stieljes).