Universidad de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática

PROCESOS DE MARKOV
MA44C

Servet Martínez

Índice

1. Cadenas de Markov a estados y tiempo discreto

1.1. Preliminares

Consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde $\mathcal{F}$ denota la σ-álgebra y $\mathbb{P}$ es la medida de probabilidad correspondiente.

Recuerdo. Sea $(I, \mathcal{F})$ espacio medible y $\Phi : \ \Omega \mapsto I$ medible. Entonces $\mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$ es medida de probabilidad en $(I, \mathcal{F})$ definida por:

$$\mathbb{P} \circ \Phi^{-1}(F) = \mathbb{P}\left(\Phi^{-1}(F)\right) \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

Sea I numerable dotado de la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(I)$, en $I^{\mathbb{N}}$ la σ-álgebra producto $\mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}}$ es engendrada por los cilindros :

$$\mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}} = \sigma(\mathcal{C})$$

donde los cilindros $C \in \mathcal{C}$ son de la forma:

$$C\begin{pmatrix} t_0 & \ldots & t_k \\ i_0 & \ldots & i_k \end{pmatrix} = \left\{x \in I^{\mathbb{N}} \ \mid \ x_{t_l} = i_l, \ l = 0, \ldots, k\right\}$$

$$0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_k \ \in \mathbb{N}, \quad i_0, \ldots, i_k \in I.$$

Los cilindros $\mathcal{C}$ forman una semi-álgebra engendrando $\mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}}$, luego una medida de probabilidad en $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}})$ queda determinada únicamente por sus valores en $\mathcal{C}$.

En adelante consideraremos la siguiente notación:

> I denotará un conjunto numerable (puede ser finito) (con σ-álgebra $\mathcal{P}$(I))
>
> $Y : \Omega \longrightarrow I$ variable aleatoria , significa que Y es medible : $Y^{-1}\{i\} \in \mathcal{F} \quad (\forall i \in I)$
>
> $\mathbb{P} \circ Y^{-1}(\{i\} = \mathbb{P}(Y^{-1}\{i\}) = \mathbb{P}\{w \in \Omega \ \mid \ Y(w) = i\}$

Sea $X = (X_n)_{\{}n \in \mathbb{N}\}$ con X_n variable aleatoria , se tiene que:

$$\begin{aligned} X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \ &\longrightarrow I^{\mathbb{N}} \\ \omega \ &\longmapsto X(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

es medible (con respecto a la σ-álgebra producto de $I^{\mathbb{N}}$). En efecto si:

$$[i_0 \ldots i_n] = \left\{x \in I^{\mathbb{N}} \ \mid \ x_k = i_k, \ k = 0, \ldots, n\right\}$$

es un cilindro en $I^{\mathbb{N}}$, se tiene que:

$$X^{-1}[i_0 \ldots i_n] = \bigcap_{k=0}^{n} X_k^{-1}\{i_k\} \quad \in \mathcal{F} \quad \text{pues } X_k \text{ es variable aleatoria}$$

Como la familia de los cilindros genera la σ-álgebra producto , se deduce que X es medible , esta induce una medida de probabilidad en $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}})$ vía:

$$\mathbb{P} \circ X^{-1}[i_0 \dots i_n] = \mathbb{P}(X^{-1}[i_0 \dots i_n]) = \mathbb{P}\left\{w \in \Omega \;\mid\; X_k(w) = i_k,\ k = 0, \dots, n\right\}$$

y en general si $F \in \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}}$ se tiene que $\mathbb{P} \circ X^{-1}(F) = \mathbb{P}(X^{-1}(F))$. Por lo anterior, basta asumir que estamos en el **espacio canónico**, es decir :

$$\Omega = I^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{P} \quad \text{definida en} \quad (\Omega, \mathcal{F}) \text{ y:}$$

$$\begin{aligned} X_n : I^{\mathbb{N}} &\longrightarrow I \\ \omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} &\longmapsto X_n(\omega) = \omega_n \end{aligned}$$

Así pues $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ corresponde a la trayectoria del proceso.

1.2. Cadenas de Markov

Definición 1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad , I numerable , y $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias a valores en I diremos que es una* ***Cadena de Markov*** *si:*

$$\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \;\mid\; X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \;\mid\; X_n = i_n\right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_0, \dots, i_{n+1} \in I \quad \textbf{(Propiedad de Markov)}$$

Y en este caso $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice además **homogénea** (en el tiempo) si las probabilidades de transición

$$\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = j \;\mid\; X_n = i\right\} = \mathbb{P}\left\{X_1 = j \;\mid\; X_0 = i\right\} \quad \text{es decir no dependen del tiempo } n.$$

Ejercicio 1. Sea $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ medible. Probar que la propiedad de Markov equivale a (la cadena puede ser no homogénea):

$$\mathbb{P}\left\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \;\mid\; X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{t_{n+1}} \;\mid\; X_{t_n} = i_n\right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \in \mathbb{N} \quad i_0, \dots, i_{n+1} \in I$$

Ejercicio 2. Demostrar que la propiedad de Markov equivale a:

$$\mathbb{P}\left\{X_{t_{n+k}} = i_{n+k}, \dots, X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \;\mid\; X_{t_n} = i_n \dots X_{t_0} = i_0\right\}$$

$$= \mathbb{P}\left\{X_{t_{n+k}} = i_{n+k}, \dots, X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \;\mid\; X_{t_n} = i_n\right\}$$

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad i_0, \dots, i_n, \dots i_{n+k} \in I \quad 0 \leq t_0 < \dots t_n < \dots < t_{n+k} \in \mathbb{N}$$

Previo. Antes del siguiente ejercicio recordemos lo siguiente

$$\text{Sea} \quad {\mathcal{F}_0}^n = \sigma\left\{X_0, \ldots, X_n\right\} = \sigma\left(\{\bigcap_{k=0}^{n} X_k^{-1}\left\{i_k\right\} \ \mid\ i_0, \ldots, i_k \in I\}\right)$$

σ -álgebra engendrada por $X_0, \ldots, X_n$ $\quad \mathcal{F}_n^{n+k} = \sigma\left\{X_n, \ldots, X_{n+k}\right\}$, es la σ-álgebra generada por $X_n, \ldots, X_{n+k}$

$$\mathcal{F}_n^{\infty} = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_n^{n+k}$$

es la σ-álgebra generada por $X_n, \ldots, X_{n+k}, \ldots$ $\quad \mathcal{F}_0^n, \mathcal{F}_n^{n+k}, \mathcal{F}_n^{\infty}$ están contenidos en $\mathcal{F}$, ádemas se tiene que :

$$\mathcal{F}_0^n \nearrow (\mathcal{P}(I))^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{F}_0^n \subseteq \mathcal{F}_0^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{es decir} \quad \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_0^n) = (\mathcal{P}(I))^{\mathbb{N}}$$

Ejercicio 3. Para $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ medible, demostrar que la propiedad de Markov equivale a:

$$\mathbb{P}\left\{F \ \mid\ X_{t_n} = i_0, \ldots, X_{t_0}\right\} = \mathbb{P}\left\{F \ \mid\ X_{t_n} = i_n\right\}$$

$$\forall 0 \leq t_o < \ldots < t_n, \quad i_0, \ldots, i_n \in I, \quad F \in \mathcal{F}_{t_{n+1}}^{\infty}$$

Observación. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de Markov entonces **no** necesariamente se cumple:

$$\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \ \mid\ X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n \in I_n\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \ \mid\ X_n \in I_n\right\}$$

Donde $I_n \subseteq I$, la propiedad de Markov vale si $I_n = \{i_n\}$ es **singleton**.

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov homogénea ,notamos $p_{ij} = \mathbb{P}\left\{X_{n+1} = j \ \mid\ X_n = i\right\}$ y a la matriz $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ la llamaremos **matriz de transición** de la cadena.

Definición 2. *Una matriz $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ se llamará **estocástica** si:*

$$p_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in I)$$

$$\sum_{j\in I} p_{ij} = 1 \quad (\forall i \in I)$$

Observación. Siempre podemos suponer que las probabilidades condicionales están bien definidas.

Definición 3. *Sea $p = (p_i)_{i\in I}$, $p_i = \mathbb{P}\left\{X_0 = i\right\}$, $i \in I$ se le llama distribución inicial (p es vector de probabilidad en I, es decir $p_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} p_i = 1$).*

Si $(X_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov no necesariamente homogénea su distribución esta caracterizada por:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\circ X^{-1}(C) =&\mathbb{P}\left\{X_{t_0}=i_0,\ldots,X_{t_k}\right\}\\
\text{donde } C =&C\begin{pmatrix} t_0 & \ldots & t_k \\ i_0 & \ldots & i_k \end{pmatrix}\\
=&\mathbb{P}\left\{X_{t_k}=i_k \;\mid\; X_{t_0}=i_0,\ldots,X_{t_{k-1}}=i_{k-1}\right\}\\
&\cdot \mathbb{P}\left\{X_{t_0}=i_0,\ldots,X_{t_{k-1}=i_{k-1}}\right\}\\
=&\mathbb{P}\left\{X_{t_0}=i_0\right\}\left(\prod_{l=1}^{k}\mathbb{P}\left\{X_{t_l}=i_l \;\mid\; X_{t_{l-1}}=i_{l-1}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

En donde usamos la definición de probabilidad condicional , la propiedad markoviana repetidas veces y un estado inicial i_o cualquiera.

1.3. Construccíon canónica de una Cadena de Markov-homogénea

Sea $P=(p_{ij})_{i,j\in I}$ matriz estocástica , $p=(p_i)_{i\in I}$ vector de probabilidad en I . Daremos una construcción "canónica" de una cadena de Markov homogénea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valores en I , con matriz de transición P y distribución inicial p. Consideramos $(\Omega,\mathcal{F})=(I^{\mathbb{N}},\mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}})$ y:

$$
\begin{aligned}
X_n : I^{\mathbb{N}} &\longrightarrow I\\
\omega=(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} &\longmapsto X_n(\omega)=\omega_n.
\end{aligned}
$$

Definimos en los cilindros:

$$\mathbb{P}\left\{X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\right\}=p_{i_0}\prod_{l=0}^{n}p_{i_l i_{l+1}}$$

Ejercicio 4. Demostrar que $\mathbb{P}$ define efectivamente una medida de probabilidad en$(I^{\mathbb{N}}$,$\mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}})$. (usar teorema de consistencia de Kolmogorov)

Probemos que bajo $\mathbb{P}$,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de Markov homogénea con matriz de transición P y vector de probabilidad inicial p:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{X_0=i\right\} =&p_i\\
\mathbb{P}\left\{X_{n+1}=i_{n+1} \;\mid\; X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\right\} =&\frac{\mathbb{P}\left\{X_{n+1}=i_{n+1},X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\right\}}{\mathbb{P}\left\{X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\right\}}\\
=&\, p_{i_n i_{n+1}}\\
\mathbb{P}\left\{X_{n+1} \;\mid\; X_n=i_n\right\} =&\frac{\mathbb{P}\left\{x_{n+1}=i_{n+1},X_n=i_n\right\}}{\mathbb{P}\left\{X_n=i_n\right\}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sum\limits_{j_0,\ldots,j_{n-1}\in I} \mathbb{P}\left\{X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n, X_{n-1}=j_{n-1},\ldots,X_0=j_0\right\}}{\sum\limits_{j_0,\ldots,j_{n-1}\in I} \mathbb{P}\left\{X_n=i_n, X_{n-1}=j_{n-1},\ldots,X_0=j_0\right\}} = p_{i_n i_{n+1}}$$

Lo que prueba que es cadena de Markov homogénea con P matriz de transición.

Definición 4. *Sea $P=(p_{ij})_{i,j\in I}$ estocástica , definimos para $i\in I$ fijo ,$\mathbb{P}_i$ la distribución de una cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial :*

$$(\delta_i)_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad j=i \\ 0 & j\neq i \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

es decir partiendo de $i\in I$ $\mathbb{P}_i\left\{X_0=j\right\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$

Observación. Así en general sea $\mathbb{P}_p$ probabilidad en $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}})$, $(X_n)_{n\geq 0}$ una cadena de Markov partiendo con distribución inicial p , se tiene:

$$\mathbb{P}_p\left\{\cdot\right\} = \sum_{i\in I} p_i \mathbb{P}_i\left\{\cdot\right\} \quad \left(\sum_{i\in I} \mathbb{P}\left\{\cdot \mid X_0=i\right\}\mathbb{P}\left\{X_0=i\right\} = \mathbb{P}_p\left\{\cdot\right\}\right)$$

$$\mathbb{P}_i\left\{X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\right\} = \delta_{ii_0}\prod_{l=0}^{n} p_{i_l i_{l+1}}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} p_i \mathbb{P}_i\left\{X_0=i_0\right\} &= \sum_{i\in I} p_i\delta_{ii_0} = p_{i_0} \\
(\sum_{i\in I} p_i\mathbb{P}_i)(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n) &= (\sum_{i\in I} p_i\delta_{ii_0})p_{i_0i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1}i_n} \\
&= p_{i_0}\prod_{l=0}^{n} p_{i_l i_{l+1}}
\end{aligned}$$

Notación: Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov homogénea , para i,j $\in I$, $n\in\mathbb{N}$ notemos:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left\{X_n=j \mid X_0=i\right\} \quad \textit{la probabilidad de transición en } n \textit{ pasos}$$

Observación. Por homogeneidad se tiene que $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left\{X_{n+m}=j \mid X_m=i\right\}$.
Sea ádemas la matriz de transición en n pasos :

$$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j\in I} \quad \text{para} \quad n\geq 0.$$

1.4. Teorema Semigrupo Chapman-Kolmogorov

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov con matriz de transición P, entonces $P^{(n)} = P^n \quad \forall n \geq 0$.
Es decir $p_{ij}^{(n)}$ es término (i,j) de la matriz P^n , y también se tiene la igualdad de Chapman-Kolmogorov :

$$\text{(Ch-K)} \quad p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} \quad \forall i,k \in I \quad n,m \in \mathbb{N}$$

Demostración. Se tiene: $P^1 = P$, $P^0 = \mathbb{I}$ (identidad) , $(p^{(0)})_{ij} = \mathbb{P}\{X_0 = j \mid X_0 = i\} = \delta_{ij}$, es decir $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \quad \forall i,j \in I$. Basta demostrar de la igualdad de Ch-K , en efecto esta se escribe: $P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}$, luego $P^{(n+1)} = P^{(n)}P^{(1)} = P^{(n)}P$, lo haremos por inducción para $n \geq 1$ (para $n = 0$ acabamos de verlo)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_{n+m} = k, X_0 = i\} &= \sum_{j\in I} \mathbb{P}\{X_{n+m} = k, X_n = j, X_0 = i\} \\
&= \sum_{j\in I} \mathbb{P}\{X_{n+m} = k \mid X_n = j, X_0 = i\} \mathbb{P}\{X_n = j, X_0 = i\} \\
&= \sum_{j\in I} \mathbb{P}\{X_{n+m} = k \mid X_n = j\} \mathbb{P}\{X_n = j, X_0 = i\} \\
&= \sum_{j\in I} p_{jk}^{(m)} \mathbb{P}\{X_n = j, X_0 = i\}
\end{aligned}$$

dividiendo por $\mathbb{P}\{X_0 = i\}$ queda :

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j\in I} p_{jk}^{(m)} p_{ij}^{(n)}$$

es decir $P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}$ □

Observación. Notemos que:

$$\mathbb{P}\{X_n = j\} = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)} = (pP^{(n)})_j \quad \text{distribución de la cadena luego de } n \text{ pasos}$$

1.5. Relaciones con Esperanza Condicional

Recordemos que $\mathcal{F}_0^n = \sigma\{X_0, \ldots, X_n\}$, notaremos por $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_0^n)$a la esperanza condicional de $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con respecto a $\mathcal{F}_0^n$ (con medida de probabilidad $\mathbb{P}$) , se tiene la siguiente:

Proposición 1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de variables aleatorias a valores en I , sea ádemas $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ matriz estocástica , entonces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de Markov homogénea con matriz de transición P ssi verifica:*

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}} \mid \mathcal{F}_0^n)(\omega) = p_{X_n(\omega),j} \quad \mathbb{P} - c.s$$

Nota.

- $p_{X_n(\omega),j} = \left(\sum_{i\in I} p_{ij}\, \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}\right)(\omega) = \sum_{i\in I} p_{ij}\, \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}(\omega)$
- $\mathbb{P}\left\{X_{n+1}=j \;\mid\; \mathcal{F}_0^n\right\}(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}} \mid \mathcal{F}_0^n)(\omega)$

Demostración. Observemos que $p_{X_n,j}$ es $\sigma(X_n)$-medible, luego es $\mathcal{F}_0^n$-medible (pues $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_0^n$), luego basta probar que:

$$\int_A \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}}\, d\mathbb{P} = \int_A p_{X_n,j} d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}_0^n \tag{1.1}$$

es suficiente que se tenga para $A = \{X_0 = I_0, \ldots, X_n = i_n, X_{n+1} = j\}$ con $(i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$,así el lado izquierdo de la igualdad es:

$$\int \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}}\, \mathbb{1}_{\{X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\}}\, d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n, X_{n+1} = j\right\}$$

y el lado derecho es:

$$\int \left(\sum_{i\in I} p_{ij}\, \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}\right) \mathbb{1}_{\{X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\}}\, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{i\in I} p_{ij} \int\limits_{\{X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n,X_{n+1}=j\}} d\mathbb{P} = p_{i_nj}\mathbb{P}\left\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right\}$$

luego el lado derecho = lado izquierdo ssi

$$\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = j \;\mid\; X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right\} = p_{i_nj} \tag{1.2}$$

De donde si (X_n) es cadena de Markov con matriz de transición P se deduce (1.1) . Recíprocamente de (1.2) se puede probar que si (1.1) se cumple entonces (X_n) es cadena de Markov con matriz de transición P $\square$

De esta proposición se deduce:

Proposición 2. *Sea (X_n) cadena de Markov homogénea con matriz de transición P entonces $\forall \quad h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada se tiene:*

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_0^n)(\omega) = \mathbb{E}_{X_n(\omega)}(h(X_1)) \quad \mathbb{P}\text{-}c.s$$

donde $\mathbb{E}_i(\cdot \mid A)$ significa que se parte de i , es decir la esperanza asociada a $\mathbb{P}_i$, luego:

$$\mathbb{E}_{X_n(\omega)}(h(X_1)) = \int h(X_1(\omega'))d\mathbb{P}_{X_n(\omega)}(\omega')$$

Demostración. $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, como I es numerable podemos escribir:

$$h = \sum_{j \in I} h(j)\, \mathbb{1}_{\{j\}} \quad \text{y se tiene por otra parte que} \quad h(X_{n+1})(\omega) = h(X_{n+1}(\omega))$$

así pues:

$$h(X_{n+1}) = \sum_{j \in I} h(j)\, \mathbb{1}_{\{j\}}(X_{n+1}) = \sum_{j \in I} h(j)\, \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}}$$

luego por linealidad se obtiene de la proposición anterior:

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_0^n) = \sum_{j \in I} h(j) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_{n+1}=j} \mid \mathcal{F}_0^n) = \sum_{j \in I} h(j) p_{X_n,j} = \mathbb{E}_{X_n}(h(X_1))$$

$$\text{pues} \quad \mathbb{E}_k(h(X_1)) = \int h(X_1(\omega') d\mathbb{P}_k(\omega') = \sum_{j \in I} h(j) \mathbb{P}_k \{X_1 = j\} = \sum_{j \in I} h(j) p_{kj}$$

□

Proposición 3. *Para* (X_n) *cadena de Markov homogénea y sea* $h : I^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *para* $k \geq 1$ *, entonces:*

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}) \mid \mathcal{F}_0^n)(\omega) = \mathbb{E}_{X_n(\omega)}(h(X_1, \ldots, X_k)) \quad \mathbb{P}\text{-}c.s$$

Demostración.

Ejercicio 5.

□

Proposición 4. *Sea* $h : I^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}} - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *medible,* (X_n) *cadena de Markov homogénea, entonces:*

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \mid \mathcal{F}_0^n)(\omega) = \mathbb{E}_{X_n(\omega)}(h(X_1, X_2, \ldots)) \quad \mathbb{P}\text{-}c.s$$

o equivalentemente:

$$\mathbb{E}(h(X_n, X_{n+1}, \ldots) \mid \mathcal{F}_0^n)(\omega) = \mathbb{E}_{X_n(\omega)}(h(X_0, X_1, \ldots)) \quad \mathbb{P}\text{-}c.s$$

Demostración.

Ejercicio 6.

□

1.6. Tiempos de Parada

Definición 5 (Tiempo de parada). *Dado* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*un espacio de probabilidad , sea* $(\mathcal{F}^n)_{n\geq 0}$ *"filtración" de sub* σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$ *,es decir:*

$$\mathcal{F}^0 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}^n \subseteq \mathcal{F}^{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F} \quad (donde \quad \mathcal{F} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}^n)$$

Se dice que $\mathcal{T} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *es un tiempo de parada (con respecto a la filtración* $(\mathcal{F}^n)_{n\geq 0}$*) , si* $\mathcal{T}$ *es medible y verifica:*

$$\{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{1.3}$$

Observación. la condición de tiempo de parada (1.3) equivale a:

$$\{\mathcal{T} \leq n\} \in \mathcal{F}^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$\text{pues} \quad \{\mathcal{T} \leq n\} = \bigcup_{k\leq n} \{\mathcal{T} = k\}, \quad \{\mathcal{T} = n\} = \{\mathcal{T} \leq n\} \setminus \{\mathcal{T} \leq n-1\}$$

$$\mathcal{F}^k \subseteq \mathcal{F}^n k \leq n, \quad \text{la condición de tiempo de parada también equivale a:}$$

$$\{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{pues} \quad \{\mathcal{T} = \infty\} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\mathcal{T} = n\}\right)^c \in \mathcal{F}^\infty)$$

luego (1.3) equivale a : $\{\mathcal{T} \leq n\} \in \mathcal{F}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Una última observación :

$$\{\mathcal{T} \geq n\} = \{\mathcal{T} \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}^{n-1}$$

Proposición 5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad , consideremos la filtración* $(\mathcal{F}^n)_{n\geq 0}$ *y* $\mathcal{T} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *tiempo de parada , entonces se cumple que:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathcal{T}} &:= \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\} \\ &= \{A \in \mathcal{F}^\infty : A \cap \{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

y $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ *es la* σ*-álgebra contenida en* $\mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ *, llamada* σ*-álgebra de eventos asociada a* $\mathcal{T}$

Demostración. **(i)** Probemos la igualdad de conjuntos:

($\subseteq$) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} (A \cap \{\mathcal{T} = n\})$ si $A \cap \{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}^n \quad \forall n \in \ N \cup \{\infty\}$ se deduce que $A \in \mathcal{F}^\infty$

($\supseteq$) $A \cap \{\mathcal{T} = \infty\} = A \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap \{\mathcal{T} = n\}\right) \in \mathcal{F}^\infty$

(ii) probemos que $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es σ-álgebra:

- ϕ y $\Omega \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ ($\Omega \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \mathcal{T}$es tiempo de parada)
- Sea $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ entonces $A^c \cap \{\mathcal{T} = n\} = \{\mathcal{T} = n\} \setminus (\{\mathcal{T} = n\} \cap A) \in \mathcal{F}^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- Sea $(A_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ se tiene que :

$$\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) \cap \{\mathcal{T} = n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \{\mathcal{T} = n\}) \in \mathcal{F}^n$$

luego $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$

□

Proposición 6. *Sea $\mathcal{T}$ tiempo de parada con respecto a la filtración $(\mathcal{F}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces:*

(i) $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}} \Leftrightarrow A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} A_n$ *tal que* $A_n \subseteq \{\mathcal{T} = n\}$ *con* $A_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

(ii) *la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ - medible ssi:*

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} f_n \, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T} = n\}} \quad \textit{con} \quad f_n \quad \mathcal{F}^n\textit{-medible}$$

Demostración. **(i)** Notemos que $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} (A \cap \{\mathcal{T} = n\})$. Tomando $A_n = A \cap \{\mathcal{T} = n\}$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se tiene el resultado.

(ii)

Ejercicio 7.

□

Ejemplo 1. (importante). Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ cadena de Markov a valores en I , fijemos $i \in I$ se tiene que:

$\mathcal{T}_i = \inf\limits_{n<0} \{X_n = i\}$ es tiempo de parada con respecto a $\mathcal{F}_1^n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

En efecto para $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que: $\mathcal{T}_i = n \Leftrightarrow \{X_l \neq i : \forall \quad 0 < l < n, \quad X_n = i\} \in \mathcal{F}_1^n$

1.7. Propiedad de Markov-Fuerte

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov homogénea a valores en I. Consideremos $h : I^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible acotada y sea $\mathcal{T} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tiempo de parada con respecto a la filtración $\mathcal{F}_0^n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), n \in \mathbb{N}.$, entonces se cumple la propiedad de Markov fuerte:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, h(X_{\mathcal{T}+1}, X_{\mathcal{T}+2}, \ldots) \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}}) = \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, \mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}}}(h(X_1, X_2, \ldots)) \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

Observación. Como $\{\mathcal{T} < \infty\}$ es $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$- medible se tiene que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, h(X_{\mathcal{T}+1}, X_{\mathcal{T}+2}, \ldots) \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}}) = \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, \mathbb{E}(h(X_{\mathcal{T}+1}, X_{\mathcal{T}+2}, \ldots) \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}})$$

ádemas la función $\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, X_{\mathcal{T}}$ es $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$- medible pues:

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, X_{\mathcal{T}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}=n\}}\, X_n \quad \text{con} X_n \in \mathcal{F}_0^n\text{-medible más ejercicio 7}$$

Demostración. $\forall \quad \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene:

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, \varphi(X_{\mathcal{T}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}=n\}}\, \varphi(X_n) \quad \text{es} \quad \mathcal{F}^{\mathcal{T}}\text{-medible pues}$$

$\varphi(X_n)$ es $\mathcal{F}_0^n$-medible, tomando $\varphi(i) = \mathbb{E}_i(h(X_1, X_2, \ldots))$ se deduce que $\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, \mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}}}(h(X_1, X_2, \ldots))$ es $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ medible. Sea A $\in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$, se tiene que:

$$\mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}} \quad \text{luego para mostrar:}$$

$$\int \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, h(X_{\mathcal{T}+1}, X_{\mathcal{T}+2}, \ldots) d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}}\, \mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}}}(h(X_1, X_2, \ldots)) d\mathbb{P}$$

nos basta probar:

$$\int \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}}\, h(X_{\mathcal{T}+1}, X_{\mathcal{T}+2}, \ldots) d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}}\, E_{X_{\mathcal{T}}}(h(X_1, X_2, \ldots)) d\mathbb{P}$$

notemos que:

$$\mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}}\, h(X_{\mathcal{T}+1}, X_{\mathcal{T}+2}, \ldots) = \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}}\, h(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$$
$$\mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}}\, E_{X_{\mathcal{T}}}(h(X_1, X_2, \ldots)) = \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}}\, \mathbb{E}_{X_n}(h(X_1, X_2, \ldots))$$

luego debemos probar:

$$\int \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}} h(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_{A\cap\{\mathcal{T}=n\}} \mathbb{E}_{X_n}(h(X_1, X_2, \ldots)) d\mathbb{P}$$

pero como $A \cap \{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}_0^n$ se obtiene el resultado

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}, \ldots) \mid \mathcal{F}_o^n) = \mathbb{E}_{X_n}(h(X_1, \ldots))$$

□

Observación. la propiedad de Markov-fuerte también se escribe (com las mismas hipótesis)

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}} h(X_{\mathcal{T}}, X_{\mathcal{T}+1}, \ldots) \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}}) = \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}}}(h(X_0, X_1, \ldots)) \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

Ejemplo 2. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov , dado $i \in I$ fijo , se tiene que:

$$\mathcal{T}_i = \inf_{n>0} \{X_n = i\} \text{ (llamado tiempo del primer retorno a } i)$$

es tiempo de parada pues $\{\mathcal{T}_i = n\} = \{X_m \neq i, \forall m < n, X_n = i\} \in \mathcal{F}_0^n$, para n $\in \mathbb{N}$ y por lo tanto se cumple la propiedad de Markov-fuerte.

1.8. Clasificación de Estados

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov homogénea a valores en I con matriz de transición P estocástica. Sean $i, j \in I$.

Definición 6.

- $i \to j \quad$ *si* $\quad \exists \quad n \geq 0 \quad$ *tal que* $p_{ij}^{(n)} > 0$ *, se dice que j se alcanza desde i*
- $i \leftrightarrow j \quad \Leftrightarrow \quad i \to j \quad \wedge \quad j \to i$ *,se dice que i y j se intercomunican*

Proposición 7. *La relación* $\to$ *es reflexiva y transitiva en* I*, y la relación* $\leftrightarrow$ *es de equivalencia en* I*.*

Demostración. Como $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$, luego $i \to i$ y por lo tanto se tiene la reflexividad. Para la transitividad, supongamos que $i \to j \quad \wedge \quad j \to k$, es decir $\exists\ n, m \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{jk}^{(m)} > 0$, por (Ch-K) $p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$ luego $i \to k$. Intercambiando roles se tiene que $\leftarrow$ es reflexiva y transitiva , luego estas se tienen para $\leftrightarrow$, de la misma manera se deduce la simetría de $\leftrightarrow$. □

Notación: Como $\leftrightarrow$ es relación de equivalencia notaremos:

$$C(i) = \{j \in I \mid i \leftrightarrow j\} \quad \text{la clase de equivalencia de i}$$

Definición 7 (Propiedad de Clase). *Diremos que cierta propiedad $\mathcal{P}$ definida en I es de **clase** si:*

$$\mathcal{P}(i) \quad \textit{se verifica , y} \quad j \in C(i)(\textit{es decir} \quad i \leftrightarrow j) \Rightarrow \mathcal{P}(j) \quad \textit{se verifica}$$

Proposición 8. *Sea $i \in I$, si el conjunto $A = \left\{n > 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\right\} = \emptyset$, entonces $C(i) = \{i\}$.*

Demostración. Sea j $\in I$ con $j \neq i$ tal que $i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\, n, m > 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0, \quad p_{ji}^{(m)} > 0$, y por (Ch-K) $\Rightarrow p_{ii}^{(n+m)} > 0$, luego $(n+m) \in A$ lo que es una contradicción. □

Observación. $i \to j \quad \wedge \quad j \neq i \Rightarrow \exists\, n > 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Definición 8 (Período de un estado). *Sea $i \in I$ para el cual $\exists\, n > 0$ verificando $p_{ii}^{(n)} > 0$, definimos el **período** de i como:*

$$d_i = \text{mcd}\left\{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$$

Observación. **(i)** Si $\left\{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\right\} = \phi$, se define el período $d_i \doteq 0$

(ii) Para todas las propiedades del período nos concentraremos en $i \in I$ tal que:

$$\left\{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\right\} \neq \phi$$

(iii) El conjunto $\left\{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ es cerrado para la suma , en efecto , si $p_{ii}^{(n)} > 0, \quad p_{ii}^{(m)} > 0$ por (Ch-K) $\Rightarrow p_{ii}^{(n+m)} \geq p_{ii}^{(n)} p_{ii}^{(m)} > 0$, luego $\left|\left\{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\right\}\right| = \infty$

(iv) Si $\{n_k \mid k \geq 1\} \subseteq \mathbb{N}^*$, es una infinidad de términos distintos en $\mathbb{N}^*$, entonces $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{mcd}\{n_k \mid k \geq 1\} = \text{mcd}\{n_1, \ldots, n_k\}$$

Proposición 9. *El período es una propiedad de clase , es decir, si $i \leftrightarrow j \Rightarrow d_i = d_j$.*

Demostración. Sea $i \neq$j tal que $i \leftrightarrow j$, luego $\exists\, n, m > 0$ satisfaciendo $p_{ij}^{(n)} > 0, \quad p_{ji}^{(m)} > 0$, consideremos un $r > 0$ tal que $p_{ii}^{(r)} > 0$, luego por (Ch-K) se tiene que $p_{ii}^{(tr)} > 0 \quad \forall t \geq 1 \in \mathbb{N}^*$ (pues $p_{ii}^{(tr)} \geq p_{ii}^{(r)} \cdots p_{ii}^{(r)} > 0$), nuevamente por (Ch-K) tenemos que

$$p_{jj}^{(m+tr+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(tr)} p_{ij}^{(n)} > 0$$

luego por definición de d_j se deduce que $d_j \mid (m+tr+n) \quad \forall t \geq 1 \in \mathbb{N}^*$, en particular

$$d_j \mid (m+r+n) \quad \wedge \quad d_j \mid (m+2r+n) \quad \Rightarrow \quad d_j \mid ((m+2r+n)-(m+r+n))$$

es decir $d_j \mid r \quad \forall r > 0$ tal que $p_{ii}^{(r)} > 0$, así se concluye que $d_j \mid d_i$, por simetría $d_i \mid d_j$ $\Rightarrow d_i = d_j$. □

Definición 9 (Matriz Irredicuble). *Sea $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ matriz estocástica . Diremos que es **irreducible** si:*

$$\forall i,j \in I \textit{ se tiene } i \leftrightarrow j \textit{ . Esto equivale a : } \forall i,j \in I \quad \exists n = n(i,j) \textit{ tal que } p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Observación. En el caso irreducible se satisface lo siguiente:

(1) Existe un única clase que es I , es decir $C(i) = I \quad \forall i \in I$.

(2) Todos los elementos $i \in I$ tienen el mismo período.

Proposición 10. *Dado $i \in I$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $\forall j \in C(i) \quad \exists! \quad r_j^{(i)} \in \{0,\ldots,d_i-1\}$ *tq* $\quad p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow n \equiv r_j^{(i)} \mod d_i$ *o equivalentemente* $d_i \mid (n - r_j^{(i)})$.

(ii) *Si j,$k \in C(i)$ entonces :*

$$r_k^{(i)} \equiv r_k^{(j)} + r_j^{(i)} \mod d_i$$

(iii) $\forall j \in C(i) \quad \exists N(i,j) \geq 0$ *tal que :*

$$p_{ij}^{(Nd_i + r_j^{(i)})} > 0 \quad \forall N \geq N(i,j)$$

Demostración. **(i)** No hay que mostrar la existencia pues $j \in C(i)$. Si $i = j$, se tiene que $r_i^{(i)} = 0$ (por definición de período) pues $p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow n \equiv 0 \mod d_i$.Si $i \neq j$, nos basta probar que si

$$n,m > 0 \text{ son tq } p_{ij}^{(n)} > 0,\ p_{ij}^{(m)} > 0 \Rightarrow n \equiv m \mod d_i$$

pues $\equiv \mod d_i$ es relación de equivalencia. En efecto $\exists s > 0$ tq $p_{ij}^{(s)} > 0$, por (Ch-K) se tiene que $p_{ii}^{(n+s)} > 0$, $p_{ii}^{(m+s)} > 0$ por lo tanto

$$n+s \equiv 0 \mod d_i, \quad m+s \equiv 0 \mod d_i \Rightarrow n-m \equiv 0 \mod d_i$$

pues $p_1 \equiv q_1 \mod d$ y $p_2 \equiv q_2 \mod d \Rightarrow p_1 - p_2 \equiv q_1 - q_2 \mod d$, de donde se deduce que $n \equiv m \mod d_i$.

(ii)

Ejercicio 8.

(iii) Para la demostración necesitamos el siguiente lema:

Lema 1 (Aritmético). *Sea* $S \subseteq \mathbb{N}^*$, $S \neq \phi$ *tal que* S *es cerrado para la suma (* $s, s' \in S \Rightarrow s + s' \in S$*). denotamos por* $d = \text{mcd}(S)$, *entonces* $\exists N_0 \geq 1$ *tq* $\{Nd : N \geq N_0\} \subseteq S$.

Este lema lo probaremos más adelante , ahora probemos (c) con él . El conjunto

$$S_i = \left\{ n > 0 : p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$$

verifica las hipótesis del lema (pues hemos tomado $i \in I$, tal que $S_i \neq \phi$), luego $\exists N(i) \geq 1$ satisfaciendo $p_{ii}^{(Nd_i)} > 0 \quad \forall N \geq N(i)$, es decir se verifica para $j = i$. Sea $j \neq i$, basta tomar $n_0 > 0$ tal que $p_{ij}^{(n_0)} > 0$, luego por (Ch-K) se tiene que $p_{ij}^{(Nd_i+n_0)} > 0 \quad \forall N \geq N(i)$, como $n_0 + r_j^{(i)} \in d_i N$ se tiene el resultado.

□

Demostración. **(del lema)** Para probar este lema usaremos los siguiente elementos:

(i) Probemos que si $\widetilde{S} \subseteq \mathbb{Z}$ es subgrupo para la + con $\widetilde{S} \neq \{0\}$ entonces : $\widetilde{S} = d\mathbb{Z} = \{nd\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $d = \text{mcd}\left\{s > 0 : s \in \widetilde{S}\right\} = \text{mín}\left\{s > 0 : s \in \widetilde{S}\right\}$. En efecto $\exists \quad d = \text{mín}\left\{s > 0 : s \in \widetilde{S}\right\}$, $d \in \widetilde{S}$, por ser $\widetilde{S}$ subgrupo luego $\widetilde{S} \subseteq \mathbb{Z}$. Recíprocamente si $s \in \widetilde{S}$, y sea un $s > 0$ por teorema de Euclides se tiene $s = td + u$ con $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq u < d$ como $s \in \widetilde{S}$, $td \in \widetilde{S}$, $\Rightarrow u \in \widetilde{S} \Rightarrow u = 0$ (por definición de d) $\Rightarrow s \in d\mathbb{Z}$. Para $s < 0$, $s \in \widetilde{S}$, aplicamos el argumento a -s y se deduce que $s \in d\mathbb{Z}$, así se concluye que $\widetilde{S} = d\mathbb{Z}$ y necesariamente $d = \text{mcd}\left\{s > 0 \mid s \in \widetilde{S}\right\}$.

(ii) Probemos la **igualdad de Bezout** :

Sean $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \mathbb{N}^*$, sea $d = \text{mcd}\{s_1, \ldots, s_k\}$ entonces $\exists \ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{Z}$, tal que $d = \sum_{i=1}^{k} s_i t_i$.

Demostración. Para ello consideremos $\widetilde{S} = \left\{\sum_{i=1}^{k} u_i s_i \mid u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{Z}\right\}$, se tiene que $\widetilde{S}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$, $\widetilde{S} \neq \{0\}$, luego por **(i)** se tiene que $\widetilde{S} = \widetilde{d}\mathbb{Z}$ con $\widetilde{d} = \text{mcd}\left\{s > 0 \mid s \in \widetilde{S}\right\}$ y por lo tanto $\widetilde{d} = \text{mcd}\{s_1, \ldots, s_k\} = d$ como $\widetilde{d} \in \widetilde{S} \Rightarrow d \in \widetilde{S}$ es decir $d = \sum_{i=1}^{k} t_i s_i$ para algunos $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{Z}$. □

(iii) Ahora probemos el lema , $S \subseteq \mathbb{N}^*$ cerrado para la + se tiene $\text{mcd}\{S\} = \text{mcd}\{I\}$ para $I \subset S$ finito ,dividiendo los elementos de S por $d = \text{mcd}\{S\}$ nos basta suponer que $d = 1$. Se tiene que $\exists\ \{s_1, \ldots, s_k\} \subset S$ tal que $S = \text{mcd}\{s_1, \ldots, s_k\}$, como $d = 1$ por **(ii)** $\exists\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{Z}$ satisfaciendo

$$1 = \sum_{i=1}^{k} t_i s_i = \underbrace{\sum_{\{i \ | \ t_i > 0\}} t_i s_i}_{\doteq q} - \underbrace{\sum_{\{i \ | \ t_i < 0\}} (-t_i) s_i r}_{\doteq r}$$

se tiene que $q > 0$, $r \geq 0$.

- Si $r = 0 \Rightarrow 1 \in S \Rightarrow \mathbb{N}^* \subseteq S$ y $N_0 = 1$ pues S es cerrado para +.
- Asumimos $r > 0$, por el argumento anterior es > 1 tomemos $N_0 = r(r-1)$, sea $N \geq N_0 = r(r-1)$, por teorema de Euclides tenemos $N = tr + u$ con $0 \leq u < r$ necesariamente se debe cumplir que $t \geq r - 1$ (pues $N \geq r(r-1)$) y como $u = u(q-r)$(pues $q - r = 1$) se deduce que $N = (t-u)s + uq$, del hecho que $t - u \geq 0$ se obtiene:

$$N = mr + uq \text{ con } m, r \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

Recapitulando , se tiene que $s_1, \ldots, s_k \in S$ como S es cerrado para la + se deduce que $q, r \in S$ y se concluye de (1.4) que $\forall N \geq N_0$ se tiene que $N \in S$.

$\square$

Definición 10 (Conjunto de estados cerrado). *$I' \subseteq I$ se dice **cerrado** para una cadena de Markov con matriz estocástica P, si:*

$$\sum_{j \in I'} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in I'$$

Proposición 11. *Sea$(X_n)_{n \geq 0}$ cadena de Markov con matriz de transición P, si I' es cerrado entonces:*

$$\sum_{j \in I'} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall i \in I', \quad \forall n \geq 0$$

o escrito de otra manera $\mathbb{P}_i\{X_n \in I' \quad \forall n \geq 0\} = 1 \quad \forall i \in I'$

Demostración. Para $n = 0, 1$ se tiene (por definición) , procedamos por inducción :

$$i \in I', \quad \sum_{j \in I'} p_{ij}^{(n)} = 1 \Rightarrow p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall j \notin I' \quad \text{pues } P \text{ es matriz estocástica}$$

$$\text{Por (Ch-K)} \quad \sum_{j\in I'} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{j\in I'}\sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}^{(n)} = \sum_{j\in I'}\sum_{k\in I'} p_{ik}p_{kj}^{(n)}$$

(pues $p_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad k \notin I'$)

$$= \sum_{j\in I}\sum_{k\in I'} p_{ik}p_{kj}^{(n)} \quad (k \in I' \Rightarrow p_{kj}^{(n)} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin I')$$

$$= \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}^{(n)} = 1 \quad \text{luego si } i \in I' \quad \text{se tiene que :}$$

$$\mathbb{P}_i\{X_n \in I'\} = 1 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}_i(\bigcap_{n\geq 0}\{X_n \in I'\}) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_i\{X_n \in I', \forall n \geq 0\} = 1 \text{ pues:}$$

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = 1) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n^c) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n^c\right) \leq \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n^c) = 0.$$

□

Observación.

Sea I' cerrado, para $i \in I' \Rightarrow C(i) \subseteq I'$ luego:

$$I' = \bigcup_{\{C \ | \ C\cap I' \neq \emptyset\}} C = \bigcup_{C\subseteq I'} C$$

En el caso P irreducible , con I cerrado se tiene que $C(i) = I, \quad \forall i \in I$, ádemas I es el único conjunto ($\neq \emptyset$) que es cerrado.

Definición 11 (Estado no escencial). *Sea P matriz estocástica un estado $i \in I$, se dice* ***no esencial*** *si*

$$\exists j \in I \text{ tal que } i \to j \quad \wedge \quad j \nrightarrow i.$$

Proposición 12. *Ser no esencial es propiedad de clase , es decir i no esencial y $k \in C(i) \Rightarrow k$ no esencial .*

Demostración. $(i \to j \quad \wedge \quad j \nrightarrow i \ , \ i \to k \quad \wedge \quad k \nrightarrow i) \Rightarrow k \to j \quad \wedge \quad j \nrightarrow k$ □

Proposición 13. *Unión finita de clases no esenciales no es cerrado.*

Demostración.

Ejercicio 9.

□

Corolario 1. *I finito $\Rightarrow i$ escencial $\forall i \in I$.*

Demostración. I cerrado , junto con la propiedad anterior. □

1.9. Recurrencia

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov homogénea a valores en I con matriz de transición P . Sea $i \in I$ se definió el tiempo de primer retorno en el futuro :

$$\mathcal{T}_i = \inf_{n>0} \{X_n = i\}$$

$\mathcal{T}_i$ es tiempo de parada con respecto a $\mathcal{F}_0^n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

Definición 12 (Estado Recurrente). *Un estado $i \in I$ se dice **recurrente** si*

$$\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i < \infty\} = 1$$

*y se dirá **transiente** (no recurrente) si*

$$\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i < \infty\} < 1.$$

Para el análisis de esta noción , introduzcamos algunas notaciones :

$$\text{Sea} \quad i, j \in I, \ \text{definimos:} \quad f_{ij}^{(n)} \doteq \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j = n\} \quad \text{luego} \quad f_{ij}^{(0)} = 0$$

$$\text{y :} \quad f_{ij}^{(*)} \doteq \sum_{n\geq 0} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j < \infty\}$$

Lema 2. *Sea $i, j \in I$, entonces se cumple que:*

$$\forall n \geq 0 \quad ; \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

Comentario: *si $n = 0$ $\quad p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ y $f_{ij}^{(0)} p_{jj}^{(0)} = 0$, luego se da la igualdad sólo si $i \neq j$.*

Demostración. Para $n > 0$ se tiene:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i\{X_n = j\} = \mathbb{P}_i\{X_n = j, \mathcal{T}_j \leq n\} \quad (\text{pues} X_n = j \Rightarrow \mathcal{T}_j \leq n)$$

$$= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j \leq n\}}) = \mathbb{E}_i(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j \leq n\}}) \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j})$$

pues $\quad \mathbb{E}(f) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}))$ si f es $\mathcal{B}-$ medible luego :

$$= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j \leq n\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_n=j\}} \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j})) \quad (\text{pues } \{\mathcal{T}_j \leq n\} \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j})$$

y por lo tanto se tiene

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j=k\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_n=j\}} \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j=k\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{n-k+\mathcal{T}_j}=j\}} \mid \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j=k\}} (\mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}_j}}(\mathbb{1}_{\{X_{n-k=j}\}})))$$

pues $(\mathcal{T}_j = k \subseteq \mathcal{T}_j < \infty)$ más propiedad de Markov fuerte , así tenemos que

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j=k\}} (\mathbb{E}_j(\mathbb{1}_{\{X_{n-k=j}\}})))$$

(pues $X_{\mathcal{T}_j} = j$ por def. de ínfimo)

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j=k\}} p_{jj}^{(n-k)})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j=k\}}) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$$

□

Definición 13. *Sean $i, j \in I$, $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, se define :*

$$P_{ij}(z) \doteq \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)} z^n \qquad y \quad F_{ij} \doteq \sum_{n \geq 0} f_{ij}^{(n)} z^n$$

Observación. $P_{ij}(z), F_{ij}(z)$, esatán bien definidas para $|z| < 1$ pues si:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad \rho(f) = (\limsup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |a_n|^{\frac{1}{n}} \right\})^{-1} \geq 1$$

con $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|\} \leq A$ (acotados).

Recordemos que si:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \quad \text{con} \quad \text{mín}\{\rho(f), \rho(g)\} \geq R > 0.$$

entonces se tiene que:

$$(fg)(z) = f(z)g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n \quad \text{siendo} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

luego el lema anterior adopta la siguiente forma:

Proposición 14. ***(i)*** *Si $i \neq j$ entonces $P_{ij}(z) = F_{ij}(z)P_{jj}(z) \quad \forall \quad |z| < 1$.*

(ii) *$P_{ii}(z) = 1 + P_{ii}(z)F_{ii}(z)$ es decir :*

$$P_{ii}(z) = \frac{1}{1 - F_{ii}(z)} \qquad \forall \quad |z| < 1$$

Otro elemento esencial para el análisis de recurrencias es el siguiente:

Definición 14. *Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ cadena de Markov a valores en I, dado $j \in I$ sea*

$$N_j = |\{n \geq 0 : X_n = j\}|$$

el número de veces que la cadena "visita" el estado j . Observemos que se tiene :

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}$$

Proposición 15. *El número esperado de visitas a j partiendo de i es:*

$$\mathbb{E}_i(N_j) = \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(N_j) =& \mathbb{E}_i(\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}) \\
=& \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{X_n = j\}}) \\
=& \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_i \{X_n = j\} \\
=& \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{X_n = j \ | \ X_0 = i\} = \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)}
\end{aligned}$$

□

Teorema 1. *Para $i \in I$, son equivalentes:*

- *i es recurrente*

(i) $\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i < \infty\} = 1$

(ii) $\mathbb{E}_i(N_i) = \infty$

(iii) $\mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} = 1$

y luego son equivalentes:

- *i es transiente*

$\widetilde{(i)}$ $\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i < \infty\} < 1$

$\widetilde{(ii)}$ $\mathbb{E}_i(N_i) < \infty$

$\widetilde{(iii)}$ $\mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} < 1$

Demostración. **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** .

(i) equivale a $\sum_{n \geq 0} f_{ii}^{(n)} = 1$ observemos que por T.C.M se tiene que:

$$\lim_{z \nearrow 1 (z>0)} F_{ii}(z) = \lim_{z \nearrow 1 (z>0)} \sum_{n \geq 0} f_{ii}^{(n)} z^n = \sum_{n \geq 0} f_{ii}^{(n)}$$

análogamente :

$$\lim_{z \nearrow 1 (z>0)} P_{ii}(z) = \lim_{z \nearrow 1 (z>0)} \sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)} z^n = \sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)}$$

usando la proposición 14 se deduce que: $\sum_{n \geq 0} f_{ii}^{(n)} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$.
Observemos que **(iii)** $\Rightarrow$ **(ii)** o equivalentemente $\widetilde{\textbf{(iii)}} \Rightarrow \widetilde{\textbf{(ii)}}$ ya que $(\mathbb{E}_i(N_i) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} = 0)$, luego ($i$ es transiente $\Leftrightarrow \mathbb{P}_i \{N_i < \infty\} < 1$) , ádemas si i es transiente se tiene que:

$$\mathcal{N}_i \doteq \sup \{n > 0 : X_n = i\} \quad \text{verifica} \quad \mathbb{P}_i \{\mathcal{N}_i < \infty\} = 1$$

Observación. $\mathcal{N}_i$ no es tiempo de parada.

Ejercicio 10. Probar que si i es transiente , se tiene que , $\forall j \in I, \mathbb{P}_j \{\mathcal{N}_i < \infty\} = 1$.

Por le recien comentado , nos basta probar **(i)** $\Rightarrow$ **(iii)** . Para ello definamos para $k \geq 1$ el instante de el k-ésimo retorno en el futuro a i:

$$\mathcal{T}_i(k) \doteq \inf \{n > \mathcal{T}_i(k-1) \ | \ X_n = i\} \quad (\text{luego} \quad \mathcal{T}_i(0) = 0, \mathcal{T}_i(1) = \mathcal{T}_i)$$

fácilmente se muestra que $\{\mathcal{T}_i(k) : k \geq 1\}$ son tiempos de parada.
Se tiene que

$$N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}}$$

luego , como $k \geq 1$ se tiene

$$(\mathcal{T}_i(k) < \infty \Rightarrow \mathcal{T}_i(l) < \infty) \quad \forall\, 1 \leq l \leq k$$

y se concluye :

$$N_i = \infty = \{\mathcal{T}_i(k) < \infty, \forall k \geq 1\} = \bigcap_{k \geq 1} \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}$$

luego:

$$\mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} = \mathbb{P}_i \left\{ \bigcap_{k \geq 1} \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} \right\} = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} \, (\text{pues} \, (\mathcal{T}_i(k))_k \searrow)$$

y por lo tanto:

$$\mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} = 1 \Leftrightarrow \forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} = 1$$

Probemos por inducción que: $\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} = 1$, $\forall k \geq 1$, para el caso $k = 1$ es la hipotésis **(i)** , ahor a probemos el paso inductivo:

$$\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k+1) < \infty\} = \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k+1) < \infty\}})$$

y desarrollando:

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k+1) < \infty\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}}) \qquad (\text{pues} \quad \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} = 1) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k+1) < \infty\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}} | \mathcal{F}^{\mathcal{T}_i(k)})) \qquad (\text{condicionando}) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k+1) < \infty\}} | \mathcal{F}^{\mathcal{T}_i(k)})) \quad (\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}, \mathcal{F}^{\mathcal{T}_i(k)}\text{-medible}) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}} \mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}_i(k)}}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(1) < \infty\}})) \qquad (\text{propiedad de Markov-fuerte}) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i < \infty\}}))(\text{pues} \quad X_{\mathcal{T}_i(k) = i}) = \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\}}) \\
&= \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_i(k) < \infty\} = 1 \quad (\text{hipotésis de inducción})
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$\square$

De la demostración , más precisamente de (1.5) se obtiene :

$$\forall i \in I \quad \mathbb{P}_i\left\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\right\} = \left(\mathbb{P}_i\left\{\mathcal{T}_i < \infty\right\}\right)^k \quad \forall k \geq 1. \tag{1.6}$$

Proposición 16. *Si i es transiente entonces:*

$$\mathbb{E}_i(N_i) = \frac{\theta_i}{1-\theta_i} \quad \textit{con} \quad \theta_i = \mathbb{P}_i\left\{\mathcal{T}_i < \infty\right\} < 1.$$

Demostración.

$$N_i = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_k = i\}} = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\left\{\mathcal{T}_i(k)<\infty\right\}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E}_i(N_i) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\left\{\mathcal{T}_i(k)<\infty\right\}}) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_i\left\{\mathcal{T}_i(k) < \infty\right\} = \sum_{k\geq 1} (\theta_i)^k = \frac{\theta_i}{1-\theta_i} \qquad \text{(por (1.6))}\end{aligned}$$

□

Proposición 17. *Si i es transiente, para el θ_i definido en la proposición anterior se tiene que:*

$$\mathbb{P}\left\{N_i = k\right\} = \theta_i^k(1-\theta_i) \quad \forall k \geq 1.$$

Demostración.

Ejercicio 11.

□

Proposición 18. *Ser recurrente es propiedad de clase , es decir si $i \leftrightarrow j$:*

$$i \quad \textit{recurrente (transiente)} \Leftrightarrow j \quad \textit{recurrente (transiente)}$$

Demostración. $i \leftrightarrow j$, $\Leftrightarrow \exists r, s \geq 0$ tales que $p_{ij}^{(r)} > 0$, $p_{ji}^{(s)} > 0$ luego por (Ch-K) se deduce que $p_{jj}^{(r+n+s)} \geq p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)}$ de donde concluimos que $\sum\limits_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} p_{jj}^{(n)} = \infty$ □

Obtendremos a continuación un conjunto de propiedades sobre recurrencias.

Lema 3. *$i \neq j \Leftrightarrow \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_J < \infty\}$ (partiendo de i la probabilidad de alcanzar j en un tiempo finito es > 0)*

Demostración.

Ejercicio 12.

$\square$

Proposición 19. *i es nesencial $\Rightarrow$ i es transiente (equivalentemente : i recurrente $\Rightarrow$ i esencial)*

Demostración. i no esencial $\Leftrightarrow \exists \quad j \neq i, i \to j \wedge j \not\to$ luego se tiene que:

$$\mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} = \mathbb{P}_i \{N_i = \infty, \mathcal{T}_j < \infty\} + \mathbb{P}_i \{N_i = \infty, \mathcal{T}_j = \infty\}$$

y como:

$$\mathbb{P}_i \{N_i = \infty, \mathcal{T}_j = \infty\} = \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j < \infty\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N_i = \infty\}} | \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j})) \quad = \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j < \infty\}} \mathbb{E}_j(\mathbb{1}_{\{N_i = \infty\}}))$$

ádemas $\quad \mathbb{P}_j \{N_i = \infty\} = 0 \quad$ pues j $\not\to$ i $\Rightarrow \mathbb{P}_j \{\mathcal{T}_i < \infty\} = 0$ (lema anterior) y se tiene que

$$\mathbb{P}_i \{N_i = \infty, \mathcal{T}_j < \infty\} = 0$$

luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i \{N_i = \infty\} = \mathbb{P}_i \{N_i = \infty, \mathcal{T}_j = \infty\} &\leq \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j = \infty\} \\ &= 1 - \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j < \infty\} \end{aligned}$$

pues $\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j < \infty\} > 0$ ya que $i \to j$ más el lema anterior . $\square$

Corolario 2. *Sea i recurrente entonces:*

$$\mathbb{P}_i \{X_n \in C(i), \forall n \geq 0\} = 1 \qquad \textit{es decir, } C(i) \textit{ es } \boldsymbol{cerrado}$$

Demostración. $i \to j \Rightarrow j \to i$ (i es esencial por propiedad anterior) es decir $j \in C(i)$, en particular $\sum\limits_{j \in C(i)} p_{ij} = 1$ luego $C(i)$ es cerrado. $\square$

Proposición 20. *Sea $i \neq j$ entonces:*

$$\mathbb{P}_i \{N_j = \infty\} = \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j < \infty\} \mathbb{P}_j \{N_j = \infty\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{N_j=\infty\}}) &= \mathbb{E}_i(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N_j=\infty\}}\,\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j<\infty\}}\,|\mathcal{F}^{\mathcal{T}_j})) \\
(\text{pues } \{\mathcal{T}_j<\infty\}\subseteq\{N_j=\infty\}) &= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j<\infty\}}\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N_j=\infty\}}\,|\mathcal{F}^{\mathcal{T}_j}))
\end{aligned}$$

$$(\text{ pues } \{\mathcal{T}_j<\infty\} \text{ es } \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j} - \textit{medible})$$

$$=\mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j<\infty\}}\,\mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}_j}}(\mathbb{1}_{\{N_j=\infty\}}))$$

$$(\text{ propiedad de Markov-fuerte })$$

$$=\mathbb{P}_j\{N_j=\infty\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j<\infty\}\}$$

□

Lema 4. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, consideremos una filtración $(\mathcal{F}^n)_{n\geq 0}$ tal que $\mathcal{F}^n\nearrow\mathcal{F}^\infty\subseteq\mathcal{F}$. Sea ádemas $\mathcal{T}$,θ tiempos de parada con respecto a $(\mathcal{F}^n)_{n\geq 0}$ entonces:*

$$\{\mathcal{T}\leq\theta\}\in\mathcal{F}^{\mathcal{T}}\cap\mathcal{F}^{\theta}\ \textit{as como}\ \{\mathcal{T}<\theta\}\ \textit{y}\ \{\mathcal{T}=\theta\}$$

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{T}\leq\theta\}\in\mathcal{F}^{\mathcal{T}} &\Leftrightarrow \underbrace{\{\mathcal{T}\leq\theta\}\cap\{\mathcal{T}=n\}}\in\mathcal{F}^n\quad\forall n\in\mathbb{N} \\
&= \quad \{\theta\geq n\}\cap\{\mathcal{T}=n\}=\{\theta<n\}^c\cap\{\mathcal{T}=n\} \\
\text{por otra parte }\{\mathcal{T}\leq\theta\}\in\mathcal{F}^{\theta} &\Leftrightarrow \underbrace{\{\mathcal{T}\leq\theta\}\cap\{\theta=n\}}\in\mathcal{F}^n\quad\forall n\in\mathbb{N} \\
&= \quad \{\mathcal{T}\leq n\}\cap\{\theta=n\}
\end{aligned}$$

luego $\{\mathcal{T}\leq\theta\}\in\mathcal{F}^{\theta}\cap\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ la otra relación se prueba análogamente. □

Proposición 21. *Sea i recurrente, se tiene $i\to j\Rightarrow\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j<\infty\}=1$*

Demostración. Sea $i \neq j$, se tiene:

$$\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \infty\} = \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i < \infty\} + \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i < \infty\}$$

(como $i \neq j$ se tiene que $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_j = \infty, \quad \{\mathcal{T}_i < \infty\} = \emptyset$)

notemos que $\{\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i < \infty\} = \{\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_j\}$

luego: $= \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_j\} + \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i < \infty\}$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i < \infty\} &= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\}}, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i < \infty\}}) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\}}, \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i < \infty\}} | \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j})) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i < \infty\}} | \mathcal{F}^{\mathcal{T}_j}))
\end{aligned}$$

(pues $\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\} \in F^{\mathcal{T}_j}$)

$$\begin{aligned}
\text{(por Markov fuerte)} &= \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\}} \mathbb{E}_{X_{\mathcal{T}_j}}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_i < \infty\}})) \\
&= \mathbb{P}_j\{\mathcal{T}_i < \infty\} \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\}
\end{aligned}$$

de donde se tiene:

$$\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \infty\} = \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_j\} + \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\} \mathbb{P}_j\{\mathcal{T}_i < \infty\}.$$

y como $1 = \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_j\} + \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\}$

(pues $\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_j\} = 0$ ya que $j \neq i$ e i recurrente)

se deduce que :

$$\text{si} \quad \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\} > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_j\{\mathcal{T}_i < \infty\} = 1.$$

Mostremos que:

$$\mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\} > 0 \quad \text{del hecho que} \quad i \to j$$

$\exists\ r > 0$ tal que $p_{ij}^{(r)} > 0$ y por lo tanto $\exists\ i_1, \ldots, i_{r-1}$ tal que:

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{r-2} i_{r-1}} p_{i_{r-1} j} > 0 \quad \text{por (Ch-K)}$$

definimos $l \doteq \max\{0 \geq k \geq r-1, i_k = i\}$ con $i_0 = i$, se tiene:

$$p_{i_l i_{l+1}} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0 \quad \text{con} \quad i_l, i_{l+1}, \ldots, i_{r-1} \neq i$$

luego:

$$\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j < \mathcal{T}_i\} \geq p_{i_k i_{k+1}} \cdots p_{i_{r-1} j} > 0$$

concluimos que $\mathbb{P}_j \{\mathcal{T}_i < \infty\} = 1$ lo que prueba la proposición (intercambiando los roles de i con j). $\square$

Proposición 22. ***(Criterio algebraico para probar recurrencia)****: Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a valores en I , con matriz de transición $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ irreducible , entonces la cadena es recurrente ssi:*

$$\forall i_0 \in I (\textit{o equivalentemente } \exists i_0 \in I)$$

se verifica que si

$$y = (y_j)_{j\in I} \textit{ es solución } \textbf{\textit{acotada}} \textit{ del sistema de ecuaciones:}$$

$$y_i = \sum_{j\in I} p_{ij} y_j \quad \forall i \neq i_0 \quad (*)$$

debe ser ***constante****.*

Demostración. Fijemos $i_0 \in I$, y consideremos$\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{ij})_{i,j\in I}$ tal que:

$$\widetilde{p}_{ij} = p_{ij} \text{ si } i \neq i_0, \quad \widetilde{p}_{i_0 j} = \delta_{i_0 j}$$

sea $\widetilde{\mathbb{P}}_i$ ley de probabilidad asociada a la cadena $(\widetilde{X}_n)$ definida por $\widetilde{P}$ partiendo de i. Observemos que $\widetilde{\mathbb{P}}_i = \{X_n = i_0, \forall n \geq 0\} = 1$ (se dice que i_0 es absorbente para $(\widetilde{X}_n)$) , se tiene que:

$$\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} = \widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\widetilde{\mathcal{T}}_{i_0} < \infty\right\} \quad \forall i \neq i_0 \text{ y } \quad \widetilde{\mathbb{P}}_{i_0} \left\{\widetilde{\mathcal{T}}_{i_0} < \infty\right\} = 1$$

notemos además que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} =& \sum_{j\in I} \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty, X_1 = j\} \\
=& \mathbb{P}_i \{X_1 = i_0\} + \sum_{j\neq i_0} \mathbb{E}_i(\mathbb{1}_{\{X_1=j\}} \mathbb{E}_j(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0}<\infty\}})) \\
=& p_{ii_0} + \sum_{j\neq i_0} p_{ij} \mathbb{P}_j \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

En particular

$$\mathbb{P}_{i_0} \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} = 1 \Leftrightarrow \forall j \neq i_0 \text{ tal que } p_{i_0 j} > 0 \text{ se tiene } \mathbb{P}_j \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} = 1 \qquad (1.8)$$

Ahora probemos el resultado:

($\Leftarrow$) Supongamos que la propiedad se cumple , probemos entonces que hay recurrencia.
Sea $y_{i_0} = 1,\ y_j = \mathbb{P}_j \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\}$ por (1.7) se tiene que $y = (y_j)_{j\in I}$ es solución del sistema :

$$y_i = \sum_{j\in I} p_{ij} y_j \quad \forall i \neq i_0 \quad (*)$$

Como es acotada (por 1), deducimos de la propiedad que y es constante . Como $y_{i_0} = 1$, concluimos que $y_j = 1 \quad \forall j \in I$, es decir $\mathbb{P}_j \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} = 1 \quad \forall j \in I$ por (1.8) se deduce que i_0 es recurrente , luego (por irreducibilidad) la cadena es recurrente.

($\Rightarrow$) Asumamos recurrencia , probemos que se cumple la propiedad . Para ello fijemos $i_0 \in I$, notemos que $(*)$ equivale a:

$$\widetilde{P} y = y \quad (\widetilde{*})$$

En efecto , $(\widetilde{P}y)_i = (Py)_i$, si $i \neq i_0$, por otra parte se tiene que: $(\widetilde{P}y)_{i_0} = y_{i_0}$. Supongamos que y es solución acotada (por M) de $(*)$ (o equivalentemente de $(\widetilde{*})$). Debemos probar que y es constante. Iterando $\widetilde{P}y = y$ se tiene que $\widetilde{P}^n y = y \quad \forall n \geq 0$. Luego:

$$y_i = \sum_{j\in I} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} y_j = \widetilde{p}_{ii_0}^{(n)} y_{i_0} + \sum_{j\neq i_0} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} y_j$$

De donde :

$$|y_i - \widetilde{p}_{ii_0}^{(n)} y_{i_0}| = \sum_{j\neq i_0} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} |y_j| \leq M(1 - \widetilde{p}_{ii_0}^{(n)}) \quad \forall i \neq i_0 \tag{1.9}$$

Por hipótesis de recurrencia, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_{i_0} < \infty\} &= \widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\widetilde{\mathcal{T}}_{i_0} < \infty\right\} = 1 \quad \forall i \neq i_0 \\
i_0 \text{ es absorbente } &= \widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\exists n \geq 1 : \widetilde{X}_n = i_0\right\} = \widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\bigcup_{N\geq 1} \left\{\exists n \leq N : \widetilde{X}_n = i_0\right\}\right\} \\
&= \lim_{N\nearrow\infty} \widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\exists n \leq N \ \mid \ \widetilde{X}_n = i_0\right\}
\end{aligned}$$

pues se trata de eventos decrecientes con N. Ahora notemos que :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\exists n \leq N : \widetilde{X}_n = i_0\right\} = \widetilde{\mathbb{P}}_i \left\{\widetilde{X}_N = i_0\right\} = \widetilde{p}_{ii_0}^{(N)}$$

(pues i_0 es absorbente para $\widetilde{\mathbb{P}}$). Luego $\lim_{N\to\infty} \widetilde{p}_{ii_0}^{(N)} = 1$, tomando $\lim_{N\to\infty}$ en (1.9) se concluye que y es constante: $|y_i - y_{i_0}| = 0 \quad \forall i \neq i_0$.

$\square$

Proposición 23. *Si j es transiente entonces $\forall i \in I$ se tiene que:*

$$\sum_{n\geq 0} p_{ij}^{(n)} < \infty \quad \text{en particular} \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

Demostración. j transiente $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n)} < \infty$, se tiene que si $i \neq j$

$$P_{ij}(z) = F_{ij}(z)P_{jj}(z) \quad \forall |z| < 1.$$

luego si $z \nearrow 1$ se obtiene:

$$\sum_{n\geq 0} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*}\left(\sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n)}\right) < \infty \quad \left(f_{ij}^{*} = \sum_{n\geq 0} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i\left\{\mathcal{T}_j < \infty\right\} \leq 1\right)$$

□

Corolario 3. *Si I es finito entonces , existen estados recurrentes . En particular si P es irreducible y I es finito la cadena es recurrente.*

Demostración. $P^{(n)}$ es matriz estocástica $\forall n \geq 0$, luego $\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = 1$, si suponemos que todos los estados fueran transientes , y como I es finito se tendría que:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in I}\left(\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}\right) = 0$$

Lo que es una contradicción. □

1.10. Recurencia positiva

Antes de entrar en el tema probemos el siguiente:

Lema 5 (De Renovación). *Sean $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}, (u_n)_{n\geq 0}$. Sucesiones reales verificando:*

(i) $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ *son positvas.*

(ii) $(u_n)_{n\geq 0}$ *es acotada (es decir :* $\sup_{n\geq 0} |u_n| = M < \infty$ *)*

(iii) $\sum_{n\geq 0} a_n = 1, \quad \sum_{n\geq 0} b_n < \infty$

(iv) $\operatorname{mcd}\{k > 0 \mid a_k > 0\} = 1$

(v) *Se verifica la siguiente ecuación de renovación:*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} + b_n \quad \forall n \geq 0 \quad (\ \mathit{ER}\ )$$

entonces $\exists \lim_{n\to\infty} u_n$ *y verifica :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_{k\geq 0} u_k}{\sum_{k\geq 0} k a_k}$$

Observación. De (ER) $u_n(1-a_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k} + b_n$ y como $a_0 < 1$ se deduce por recurrencia que $u_n \geq 0, \quad \forall n \geq 0$.

Demostración. Primero supondremos $a_1 > 0$. Como $(u_n)_{n\geq 0}$ es acotada se tiene que $\exists \quad \lambda \doteq \limsup_{n\to\infty} u_n$. Sea $(n_j)_{j\geq 0}$ una subsucesión creciente tal que $\lambda = \lim_{j\to\infty} u_{n_j}$.

(1) Probemos que $\lambda = \lim_{j\to\infty} u_{n_j-1}$, en caso contrario se tendría que existe una subsucesión de $(n_j)_{j\geq 0}$ (que seguimos notando $(n_j)_{j\geq 0}$) tal que $\lim_{j\to\infty} u_{n_j-1} = \lambda' < \lambda$. Tomemos $\varepsilon = \frac{a_1(\lambda'-\lambda)}{4}$, luego $\exists N = N(\varepsilon)$ tal que :
(a) $\sum_{n\geq N(\varepsilon)} a_n < \frac{\varepsilon}{M}$. $\quad (b)$ $\forall n \geq N$ $u_n < \lambda + \varepsilon$
(c) $\forall n \geq N : b_n < \varepsilon$ $\quad (d)$ $\exists j_0$ tal que $\quad \forall j \geq j_0$:

$$\left.\begin{array}{l} n_j \geq 2N \\ u_{n_j} > \lambda - \varepsilon \\ u_{n_j-1} < \lambda' + \varepsilon \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

Sea $j \geq j_0$, se tiene que :

$$\begin{aligned} u_{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j} a_k u_{n_j-k} + b_{n_j} &\leq \sum_{k=0}^{N} a_k u_{n_j-k} + M \sum_{k>N} a_k + b_{n_j} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} a_k u_{n_j-k} + 2\varepsilon \\ \text{como } n_j > N\text{:} \ &= a_1 u_{n_j-1} + \sum_{k=0,k\neq 1}^{N} a_k u_{n_j-k} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\leq a_1 u_{n_j-1} + (\lambda+\varepsilon)(1-a_1) + 2\varepsilon$$

$$(n_j - k \geq N \text{ si } k \leq N \text{ luego } u_{n_j-k} < \lambda + \varepsilon)$$

$$< a_1(\lambda' + \varepsilon) + (\lambda+\varepsilon)(1-a_1) + 2\varepsilon$$

$$(\text{ pues } u_{n_j-1} < \lambda' + \varepsilon \ )$$

$$= a_1\lambda' + \lambda(1-a_1) + 3\varepsilon$$

$$= \lambda - a_1(\lambda' - \lambda) + 3\varepsilon$$

$$= \lambda - 4\varepsilon + 3\varepsilon = \lambda - \varepsilon$$

lo que contradice (1.10) , así se concluye que $\lambda = \lim_{j\to\infty} u_{n_j-1}$, iterando este resultado se obtiene $\forall s \geq 0$ fijo : $\lim_{j\to\infty} u_{n_j-s} = \lambda$

(2) Sea $r_k = \sum_{n\geq 1} a_{n+k}$ para $k \geq 0$ de la definición se tiene que $a_k = r_{k-1} - r_k$ para $k \geq 1$ y ádemas:

$$\sum_{k\geq 0} r_k = \sum_{k\geq 0} k a_k \quad \left(\text{pues } \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{l\geq 0} \mathbb{1}_{\{l<k\}}\right) a_k = \sum_{l\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{l<k\}}\right) a_k = \sum_{l\geq 0}\left(\sum_{l>k} a_k\right)\right)$$

Definamos $A_n = \sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k}$ para $n \geq 0$, probaremos que:

$$A_n - A_{n-1} = b_n \quad \forall n \geq 0 \quad \text{con } A_{-1} = 0 \tag{1.11}$$

en efecto:

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} r_k u_{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} - \sum_{k=1}^{n} r_{k-1} u_{n-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k} + r_0 u_n \\ &= -\sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k} + u_n - a_0 u_n \\ &= u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n \end{aligned}$$

Luego por (ER) y de (1.11) se deduce que $A_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Sea N fijo , y consideremos un j tal que $n_j > N$ (es posible por tratarse de términos positivos), de esta manera:

$$\sum_{l=0}^{n_j} b_l = A_{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j} r_k u_{n_j-k} \geq \sum_{k=0}^{N} r_k u_{n_j-k}$$

haciendo $j \to \infty$ se obtiene:

$$\sum_{l \geq 0} b_l \geq \lambda \sum_{k=0}^{N} r_k \quad \text{y concluimos que :}$$

$$\lambda = \limsup_{n \to \infty} u_n \leq \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0}^{N} r_k} \quad \text{haciendo } N \to \infty \text{ se obtiene}$$

$$\limsup_{n \to \infty} u_n \leq \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0} r_k} = \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0} k a_k} \quad \text{en el caso } \sum_{k \geq 0} k a_k = \infty$$

esto prueba $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, asíque para demostrar que el límite existe nos basta asumir que $\sum\limits_{k \geq 0} k a_k < \infty$ y probar que:

$$\liminf_{n \to \infty} u_n \geq \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0} k a_k}.$$

(3) Sea $\mu = \liminf\limits_{n \to \infty} u_n$ y consideremos $(n_j)_{j \geq 0}$ sucesión tal que $\mu = \lim\limits_{j \to \infty} u_{n_j}$, análogamente a lo hecho en la parte **(1)** se demuestra que $\mu = \lim\limits_{j \to \infty} u_{n_j - 1}$, de donde se concluye que $\forall s \geq 0$ fijo $\mu = \lim\limits_{j \to \infty} u_{n_j - s}$. Sea N fijo y tomemos j tal que $n_j > N$; con esto se tiene lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n_j} b_k = A_{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j} r_k u_{n_j - k} \leq \sum_{k=0}^{N} r_k u_{n_j - k} + M \sum_{k \geq N+1} r_k \tag{1.12}$$

notemos que $\infty > \sum\limits_{k \geq 0} k a_k = \sum\limits_{k \geq 0} r_k$ luego $\sum\limits_{k \geq 0} r_k$ es finito, haciendo $j \to \infty$ en (1.12) se obtiene:

$$\sum_{k \geq 0} b_k \leq \mu \sum \sum_{k=0}^{N} r_k + M \sum_{k > N} r_k \quad \text{haciendo } N \to \infty \text{ queda :}$$

$$\mu = \liminf_{n \to \infty} u_n \geq \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0} r_k} = \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0} k a_k}$$

Con esto se concluye :

$$\exists \quad \lim_{n \to \infty} u_n = \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k}{\sum\limits_{k \geq 0} k a_k}$$

Consideremos ahora el caso general, sean:

$$l_1, \ldots, l_h > 0 \text{ tal que } a_{l_i} > 0, i = 1, \ldots, h \text{ con } \operatorname{mcd}\{l_1, \ldots, l_h\} = 1$$

situándose en la parte **(1)** de la demostración tenemos que :

$$\lambda = \limsup_{n \to \infty} u_n = \lim_{j \to \infty} u_{n_j}$$

se prueba que:

$$\lambda = \lim_{j \to \infty} u_{n_j - sl_i} \quad \forall s_i > 0 \text{ fijo} \quad i = 1, \ldots, h \quad \text{y luego :}$$

$$\lambda = \lim_{j \to \infty} u_{\left(n_j - \sum_{i=1}^{h} s_i l_i\right)} \quad \forall s_1, \ldots, s_h \text{ fijos, como:}$$

$$1 = \operatorname{mcd}\{l_1, \ldots, l_h\} \quad \exists N_0 > 0, \forall N \geq N_0 \quad N = \sum_{i=1}^{h} s_i l_i$$

en particular:

$$\lambda = \lim_{j \to \infty} u_{n_j - N} \quad \forall N \geq N_0 \text{ fijo}$$

luego, considerando la subsucesión $n'_j = n_j - N_0$ se obtiene:

$$\lambda = \lim_{j \to \infty} u_{n_j - s} \quad \forall s \geq 0 \quad \text{fijo}$$

tomando $(n'_j)_{j\geq 0}$ en vez de $(n_j)_{j\geq 0}$ la demostración vale de igual manera.

□

Definición 15 (Tiempo medio de retorno). *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a valores en I, para $i \in I$ recurrente definimos:*

$$\mu_i = \mathbb{E}_i(\mathcal{T}_i) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} n f_{ii}^{(n)} \quad \textit{\textbf{el tiempo medio de retorno a i}}$$

Observación.

- Si i es transiente $\mu_i = \infty$ pues $f_{ii}^{(\infty)} = \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i = \infty\} > 0$, si i es recurrente se tiene que:

$$\mu_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} n f_{ii}^{(n)} \quad (\text{pues } f_{ii}^{(\infty)} = 0)$$

- Se tiene $\mu_i = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}_i < \infty\} = 0$, luego en el caso recurrente $\mu_i \in (0, \infty]$

Teorema 2. *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a valores en I , para $i \in I$ recurrente, aperiódico (es decir de período $d_i = 1$), se tiene:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$
- $\forall j \in C(i) : \lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

Demostración. Tomemos para $k \geq 0 \quad a_k = f_{ii}^{(k)}, u_k = p_{ii}^{(k)}, b_k = \delta_{k0}$, veamos que se satisfacen las hipótesis del lema de renovación. En efecto se tiene que : $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}, (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \leq 1$, también se tiene que $\sum\limits_{k\geq 0} a_k = \sum\limits_{k\geq 0} f_{ii}^{(k)} = 1$ pues i es recurrente , $\sum\limits_{k\geq 0} b_k = 1 < \infty$, se verifica la ecuación de renovación :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} + b_n \quad \forall n \geq 0 \quad (\text{ ER })$$

Como i es aperíodico $\operatorname{mcd}\{n > 0 : u_n > 0\} = 1$ esto implica que:

$$\operatorname{mcd}\{k > 0 : a_k > 0\} = 1 \tag{1.13}$$

ya que en caso contrario si $\operatorname{mcd}\{k > 0 : a_k > 0\} = d > 1$ se tendría que $a_k = 0 \quad \forall k \notin d\mathbb{N}^*$ luego por recurrencia utilizando (ER) , se demuestra que $u_n = 0 \quad \forall n \in d\mathbb{N}^*$, con lo que i no sería aperíodico. (si $0 < r < d$ y como $a_0 = 0, u_{ld+r} = \sum\limits_{h=1}^{l} a_{hd} u_{(l-h)d+r}$ y por hipótesis de inducción se anula) , así tenemos (1.13), luego se cumplen todas las hipótesis del lema de renovación, entonces:

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\sum\limits_{k\geq 0} k a_k} = \frac{1}{\mu_i}$$

Para la segunda parte, consideremos $i \neq j$ con $j \in C(i)$, como i es recurrente se tiene que:

$$1 = \mathbb{P}_j\{\mathcal{T}_i < \infty\} = \sum_{n\geq 0} f_{ji}^{(n)} \qquad \text{luego se tiene que:}$$

$$p_{ji}^{(n)} - \frac{1}{\mu_i} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} - \sum_{k\geq 0} f_{ji}^{(k)} \frac{1}{\mu_i}$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $N = N(\varepsilon)$ tal que $\forall n \geq N$

$$\sum_{k\geq N} f_{ij}^{(k)} < \varepsilon, \quad |p_{ii}^{(n)} - \frac{1}{\mu_i}| < \varepsilon \quad \text{ se tiene que para } n \geq 2N$$

$$p_{ji}^{(n)} - \frac{1}{\mu_i} = \sum_{k=0}^{N} f_{ji}^{(k)}(p_{ii}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_i}) + \sum_{k=N+1}^{n} f_{ji}^{(K)}(p_{ii}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_i}) - \sum_{k>n} f_{ji}^{(k)} \frac{1}{\mu_i}$$

$$\text{luego acotando} \quad |p_{ji}^{(n)} - \frac{1}{\mu_i}| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{N} f_{ji}^{(k)} + \varepsilon(1 + \frac{2}{\mu_i}) \leq \varepsilon(2 + \frac{2}{\mu_i})$$

$$\text{(pues } 0 \leq k \leq N \Rightarrow n-k \geq N\text{), y por lo tanto} \quad |p_{ii}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_i}| < \varepsilon$$

de donde se tiene el resultado (pues $\frac{1}{\mu_i} < \infty$) . □

Proposición 24. *Sea $i \in I$ estado recurrente de período d, entonces:*

$$\textbf{\textit{(i)}} \ \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}, \quad \textit{con} \quad \mu_i = \sum_{n\geq 0} n f_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}(\mathcal{T}_i)$$

$$\textbf{\textit{(ii)}} \ \textit{para } j \in C(i), \quad \lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(nd+r_i^{(j)})} = \frac{d}{\mu_i}$$

Demostración. **(i)** El estado inicial es i, como una clase recurrente es cerrada podemos suponer que $(E = C(i))$ que la cadena $(X_n)_{n\geq 0}$ es de período d (en $C(i)$) y $X_0 = i$. Consideremos $(Y_n = X_{nd})_{n\geq 0}$, se tiene que $(Y_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov a estados en $C(i)$ con matriz de transición $P^d = (p_{kl}^{(d)} : k,l \in C(i))$ y tiene período 1, pues mcd $= \left\{n > 0 : p_{ii}^{(nd)} > 0\right\} = 1$ i es recurrente en $(Y_n)_{n\geq 0}$ pues:

$$\sum_{n\geq 0} f_{ii}^{(nd)} = \sum_{m\geq 0} f_{ii}^{(m)} = 1 \quad \text{y} \quad f_{ii}^{(l)} = 0 \quad \text{si } l \notin d\mathbb{N}$$

por ser i aperíodico recurrente para P^d se tiene por el teorema anterior que:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{1}{\widetilde{\mu}_i}, \quad \text{con} \quad \widetilde{\mu}_i = \sum_{n\geq 0} n p_{ii}^{(nd)} = \frac{1}{d}\sum_{n\geq 0} nd p_{ii}^{(nd)} = \frac{\mu_i}{d}$$

(ii)

Ejercicio 13.

□

Proposición 25. *Sea i recurrente, entonces se tiene para la media de Cesaro:*

$$\forall j \in C(i): \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ji}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$$

Demostración. Observemos que $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n$. En efecto dado $\varepsilon > 0$, luego $\exists N^\varepsilon = N(\varepsilon)$ tal que : $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N^\varepsilon$, con $N > kN^\varepsilon$ se tiene que:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N^\varepsilon} a_n + \frac{1}{N} \sum_{n=N^\varepsilon+1}^{N-1} a_n - a \right\| \leq \sup_{n\geq 0} a_n \left(\frac{N^\varepsilon - 1}{N}\right) + \varepsilon\left(1 + \frac{N^\varepsilon}{N}\right)$$

Probemos la proposición, para lo que sigue no se perderá generalidad con suponer que $j = i$. Como $p_{ii}^{(nd+r)} = 0$ para $0 < r < d$ y $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$ se tiene:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{Md} \sum_{n=0}^{Md-1} p_{ii}^{(n)} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{d} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} p_{ii}^{(nd)} \right\} = \frac{1}{\mu_i}.$$

Como $\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\frac{(Nd)}{d}} p_{ii}^{(n)}$ se deduce el resultado. □

Definición 16 (Estado recurrente positivo). *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a valores en E.*

(i) *$i \in I$ se dice **recurrente positivo**, si es recurrente y $\mu_i < \infty$*

(ii) *$i \in I$ se dice **recurrente nulo**, si es recurrente y $\mu_i = \infty$*

Observación. Sea i recurrente, de acuerdo a nuestros resultados, i es recurrente positivo ssi:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ii}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} > 0.$$

y se tiene que, i es recurrente nulo ssi:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ii}^{(n)} = 0$$

Proposición 26. . *Ser recurrente positivo (respectivamente nulo) es propiedad de clase, es decir si $i \leftrightarrow j$:*

$$i \quad \text{recurrente positvo(nulo)} \Leftrightarrow j \quad \text{recurrente positivo(nulo)}$$

Demostración. Supongamos $i \neq j$, $\exists r, s > 0$ tal que $p_{ij}^{(r)} > 0, p_{ji}^{(s)} > 0$ como $p_{ii}^{(r+s)} > 0$. se tiene que $r + s = kd$, para álgun $k \in \mathbb{N}^*$, luego si $n > k$ se tiene que:

$$p_{jj}^{(nd)} \geq p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n-k)d} p_{ij}^{(r)} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} A > 0 \quad \text{,para algún A}$$

□

Ejercicio 14. Sea i transiente y j recurrente aperiódico, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}^*}{\mu_j} \quad \text{,donde } f_{ij}^* = \mathbb{P}_i \{\mathcal{T}_j < \infty\}$$

Para terminar esta sección observemos lo siguiente:

Proposición 27. *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a estados en E finito, entonces no existen estados recurrentes nulos. En particular, si la cadena es irreducible será recurrente positiva.*

Demostración. Supongamos que existe $i \in I$ un estado recurrente nulo, $C(i) \subseteq I$ es finita. La matriz $\widetilde{P} = P\big|_{C(i)\times C(i)}$ es estocástica (pues $C(i)$ es cerrada) y es recurrente nula (ya que i es recurrente nulo y ser recurrente nulo es propiedad de clase), luego:

$$1 = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j\in C(i)} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{j\in C(i)} \liminf_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \qquad (\text{ Fatou })$$

lo que es una contradicción. □

1.11. Distribuciones Estacionarias

Definición 17 (Distribución estacionaria). *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a estados en I, con matriz de transición $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ esocástica . Diremos que el vector $\pi = (\pi_i)_{i\in I}$ es una **distribución estacionaria** de la cadena si se verifica:*

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i\in I} \pi_i = 1$$

(es decir es un vector de probabilidad), y:

$$\pi^t = \pi^t P \quad \left(\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij} \quad \forall j \in I\right), \quad \textit{por iteración} \quad \pi^t = \pi^t P^n, n \geq 0$$

Una distribución estacionaria π queda definida por la siguiente condición : para π vector de probabilidad consideremos:

$$\mathbb{P}_\pi(\cdot) = \sum_{j\in I} \pi_i \mathbb{P}_i(\cdot)$$

es decir $\mathbb{P}_\pi(\cdot)$ es la distribución de la cadena con la condición inicial :

$$\mathbb{P}_\pi\{X_0 = i\} = \pi_i \quad \forall i \in I$$

entonces el vector de probabilidad π es una distribución estacionaria ssi

$$\mathbb{P}_\pi\{X_n = i\} = \pi_i \quad (\forall i \in I, \quad \forall n \geq 0)$$

En efecto:

$$\mathbb{P}_\pi\{X_n = i\} = \sum_{k\in I} \mathbb{P}_\pi\{X_0 = k\} p_{ki}^{(n)} = \sum_{k\in I} \pi_k p_{ki}^{(n)} = \left(\pi^t P^n\right)_i = \pi_i.$$

Más aún se tiene :

Proposición 28. *π es distribución estacionaria ssi $\mathbb{P}_\pi$ es invariante por traslación en el tiempo, es decir:*

$$\mathbb{P}_\pi\left\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n\right\}=\mathbb{P}_\pi\left\{X_{t_1+s}=i_1,\ldots,X_{t_n+s}=i_n\right\}$$
$$\forall\ 0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall i_1,\ldots,i_n\in I,\quad \forall s\geq 0.$$

Demostración.($\Leftarrow$) $n=1,t_1=0,s=1$ la igualdad $\mathbb{P}_\pi\left\{X_0=j\right\}=\mathbb{P}_\pi\left\{X_1=j\right\}\quad \forall j\in I$ equivale a π distribucin estacionaria .

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi\left\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n\right\}=&\sum_{i\in I}\pi_i\mathbb{P}_i\left\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n\right\}\\
=&\left(\sum_{i\in I}\pi_i p_{ii_1}^{(t_1)}\right)p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}=(\pi P^{(t_1)})_i\\
=&\pi_{i_1}=(\pi P^{(t_1+s)})_{i_1}\\
=&\left(\sum_{i\in I}\pi_i p_{ii_1}^{(t_1+s)}\right)p_{i_1i_2}^{(t_2+s-(t_1+s))}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n+s-(t_{n-1}+s))}\\
=&\mathbb{P}_\pi\left\{X_{t_1+s}=i_1,\ldots,X_{t_n+s}=i_n\right\}
\end{aligned}$$

□

Observación. Luego si $\pi^t=\pi^tP$, se puede extender la cadena para tiempos en $\mathbb{Z}$, de la siguiente manera, se define $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ por:

$$\mathbb{P}_\pi\left\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n\right\}=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ii_1}^{(t_1)}p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}$$

$$\forall t_1<t_2<\ldots<t_n\in\mathbb{Z},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall i_1,\ldots,i_n\in I,$$

Esto define una ley de probabilidad en $E^{\mathbb{Z}}$, que es invariante para traslaciones de un $s\in\mathbb{Z}$ (Teorema de consistencia de Kolmogorov)

Teorema 3. *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov irreducible, con matriz de transición P entonces existe distribución estacionaria $\pi=(\pi_i)_{i\in I}$ ssi la cadena es recurrente positiva y se tiene:*

$$\pi_i=\frac{1}{\mu_i}>0\quad \forall i\in I\quad (\mu_i=\mathbb{E}_i(\mathcal{T}_i))$$

luego, en este caso:

$$\forall j\in I,\quad \pi_j=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}p_{ij}^{(n)}\right)\quad (\textit{es decir } C(i)=E)$$

y si la cadena es ádemas aperiódica se tiene la relación más fuerte:

$$\forall j \in I, \quad \pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (\textit{es decir } C(i) = E)$$

así en particular, si existe distribución estacionaria es única y estrictamente positiva.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea π distribución estacionaria, consideremos $j \in I$ tal que $\pi_j > 0$, se cumple que $\pi^t = \pi^t P^n$, es decir $\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}^{(n)} \quad \forall n \geq 0$.

$$\pi_j = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{j\in I} \pi_i \left(\limsup_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \right) \quad (\text{ por Fatou })$$

luego $\exists i \in I$ tal que $\limsup_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$, de esta manera la cadena (por ser irreducible) no puede ser transiente, ni recurrente nula, por lo tanto es recurrente positiva.

($\Leftarrow$) Supongamos que la cadena es recurrente positiva, probemos entonces que $\pi = (\pi_j \doteq \frac{1}{\mu_j})_{j\in I}$ es distribución estacionaria, en efecto :

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in I} p_{jk}^{(n)} p_{kj} \quad \forall n \geq 0 \quad \text{luego se tiene que:}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in I} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ik}^{(n)} \right) p_{kj}$$

Por Fatou, tomando $\liminf_{N\to\infty}$ y recurrencia postiva se deduce que: $\pi_j \geq \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj} \quad \forall j \in I$, supongamos que para algún $j \in I$ se tuviese la desigualdad estricta, sumando sobre $j \in I$ se tendría que:

$$\sum_{j\in I} \pi_j > \sum_{j\in I} \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj} = \sum_{k\in I} \pi_k \left(\sum_{j\in I} p_{kj} \right) = \sum_{k\in I} \pi_k$$

lo que es una contradicción, se concluye entonces que π es estacionaria , es decir :

$$\pi_j = \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj} \quad \forall j \in I$$

ádemas por recurrencia postiva $\pi_j > 0 \quad \forall j \in I$ y como : $\sum_{j\in I} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ij} \right) = 1$. Ahora por Fatou, tomando $\liminf_{n\to\infty}$ se tiene que: $\sum_{j\in I} \pi_j \leq 1$, probemos que se tiene la igualdad, como π es distribución estacionaria se tiene que :

$$\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_{ij}^{(n)} \right)$$

definiendo $f_N(i) \doteq \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} p_{ij}^{(n)}$ se tiene que $|f_N(i)| \leq 1$ y es π-integrable pues $\sum\limits_{i\in I} \leq 1$ como $f_N \to \pi_j$ cuando $N \to \infty$ usando T.C.D se obtiene:

$$\pi_j = \left(\sum_{i\in I} \pi_i\right)\pi_j \quad \text{como } \pi_j \geq 0 \Rightarrow \sum_{i\in I}\pi_i = 1.$$

luego π es distribución estacionaria . Probemos por último que en caso irreducible la distribución estacionaria es única con $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}, j \in I$, en efecto si existiera $\widetilde{\pi}$ distribución estacionaria se tendría que:

$$\widetilde{\pi}_j = \sum_{j\in I}\widetilde{\pi}_i\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p_{ij}^{(n)}\right) \quad \text{, como } \exists \quad \widetilde{\pi} \text{ la cadena es recurrente positiva}$$

de este modo podemos aplicar T.C.D obteniendo :

$$\widetilde{\pi}_j = \left(\sum_{j\in I}\widetilde{\pi}_i\right)\frac{1}{\mu_j} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\pi}_j = \frac{1}{\mu_j} \quad \forall j \in I$$

□

Observación. Queda propuesto analizar porque en el caso en que la cadena no es irreducible la distribución estacionaria no necesariamente es única (no es única ssi hay más de una clase recurrente positiva).

Corolario 4. *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov, irreducible, recurrente positiva . Para $i_0 \in I$, consideremos*

$$\rho_j = \mathbb{E}_{i_0}\left(\sum_{n=0}^{\mathcal{T}_{i_0}-1} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right) \qquad \textit{se tiene que:} \quad \rho_j = \frac{\mu_j}{\mu_{i_0}} \quad \forall j \in I$$

Demostración. Consideremos $\rho_j = \mathbb{E}_{i_0}\left(\sum\limits_{n=1}^{\mathcal{T}_{i_0}-1} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right) \quad \forall j \in I$ notemos que $\rho_{i_0} = 1$, probemos que $\rho = (\rho_j)_{j\in I}$ es distribución estacionaria, es decir verifica:

$$\rho_j = \sum_{k\in I}\rho_k p_{kj} \quad \forall j \in I \tag{1.14}$$

en efecto :

$$\sum_{j\in I}\rho_j = \mathbb{E}_{i_0}\left(\sum_{n=1}^{\mathcal{T}_{i_0}-1}\left(\sum_{j\in I}\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right)\right) = \mathbb{E}_{i_0}(\mathcal{T}_{i_0}) = \mu_{i_0}$$

observemos que de aquí, se deduce el resultado gracias al teorema anterior y la unicidad de la distribución estacionaria, del hecho que:

$$(\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum\limits_{k \in I} \rho_k}, j \in I) \quad \text{es distribución estacionaria, se deduce :}$$

$$\frac{\rho_j}{\mu_{i_0}} = \pi_j = \frac{1}{\mu_j} \Rightarrow \rho_j = \frac{\mu_{i_0}}{\mu_j} \quad \forall j \in I$$

probemos (1.14), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\rho_j &= \mathbb{E}_{i_0} \left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{i_0} \left(\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} | \mathcal{F}_0^{n-1} \right) \right) \\
(\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\} = \{\mathcal{T}_{i_0} < n\}^c \in \mathcal{F}_0^{n-1}) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{i_0} \left(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{X_n = j\}} | \mathcal{F}_0^{n-1} \right) \right) \\
(\text{ propiedad de Markov fuerte}) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{i_0} \left(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} \mathbb{E}_{X_{n-1}} \left(\mathbb{1}_{\{X_1 = j\}} \right) \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{i_0} \left(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} p_{X_{n-1} j} \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{i_0} \left(\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} \left(\sum_{k \in I} \mathbb{1}_{\{X_{n-1} = k\}} p_{kj} \right) \right) \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{E}_{i_0} \left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n\}} \mathbb{1}_{\{X_{n-1} = k\}} \right) p_{kj} \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{E}_{i_0} \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_{i_0} \geq n+1\}} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}} \right) p_{kj} \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{E}_{i_0} \left(\sum_{n=0}^{\mathcal{T}_{i_0} - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}} \right) p_{kj} = \sum_{k \in I} \rho_k p_{kj}
\end{aligned}$$

con lo que concluimos. $\square$

1.12. Ejemplos

Ejemplo 3. Paseo Aleatorio en $I = \mathbb{Z}$. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a estados en $\mathbb{Z}$, con matriz de transición $P = (p_{ij}, i, j \in \mathbb{Z})$ dada por:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \neq 1 \\ q & \text{si } j = i-1 \\ p & \text{si } j = i+1 \end{cases} \qquad \text{con } p+q=1 \quad p \in [0,1]$$

la matriz de transición tiene la siguiente estructura:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

si $p \in (0,1)$ la cadena es irreducible pues $p_{ii}^{|j-i|} > 0$ (es decir hay una sola clase $C(i) = \mathbb{Z}$), y el periodo de la cadena es 2, ya que se tiene:

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0 \quad \text{y} \quad p_{ii}^{(2n)} > 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad \text{con:} \quad p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n}(pq)^n$$

consideremos el desarrollo de taylor :

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \text{válido para } |x| < \frac{1}{4}$$

según lo anterior tenemos que:

$$\textbf{(i)} \text{ si } \quad pq < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(2n)} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} (pq)^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}} < \infty$$

por lo tanto: $p \in [0,1] \Rightarrow pq < \frac{1}{4} \Leftrightarrow p \neq \frac{1}{2}$, luego si $p \neq \frac{1}{2}$, es decir, si el paseo **no es simétrico** se tiene que el paseo es **transiente**.

(ii) si $pq = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p = q = \frac{1}{2}$, es decir el paseo es **simétrico** se tiene del T.C.Mque:

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{x \nearrow \frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \infty$$

luego en este caso el paseo es **recurrente**.

Antes de ver los paseos en más dimensiones probemos:

Proposición 29. ***(Fórmula de Stirling)***

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{(n+\frac{1}{2})} e^{-n} \quad (\textit{donde } a_n \approx b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1)$$

Demostración. Aproximemos $\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k$ y notemos que:

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^{k} \log x dx \leq \log k \leq \int_{k}^{k+1} \log x dx \quad &(\text{ pues log es creciente }) \\ \Rightarrow \int_{0}^{n} \log x dx \leq \log n! \leq \int_{1}^{n+1} \log x dx \quad &(\text{ sumando sobre k }) \\ n \log n - n \leq \log n! \leq (n+1)\log(n+1) - n \quad &(\text{pues } \lim_{x\to 0^+} x \log x = 0 \text{)} \end{aligned}$$

Consideremos: $d_n = \log n! - [(n+\frac{1}{2})\log n - n]$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} =& -\log(n+1) - 1 - [(n+\frac{1}{2})\log n - (n+1+\frac{1}{2})\log(n+1)] \\ =&(n+\frac{1}{2})\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

notemos que: $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}$

Por otra parte se tiene lo siguiente:

$$\log(1+x) = \sum_{m\geq 1} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m} \quad , -\log(1-x) = \sum_{m\geq 1} \frac{x^m}{m} \quad \text{para } |x| < 1$$

$$\text{luego : } \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{m\geq 0} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \quad |x| < 1 \quad \text{así con } x = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} =& 2(n+\frac{1}{2}) \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2j+1} - 1 = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{(2j+1)} \frac{1}{(2n+1)^{2j}} \\ \leq& \frac{1}{3} \sum_{j\geq 1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2j} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1-(\frac{1}{2n+1})^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} \\ =& \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \quad \text{lo que nos muestra que:} \end{aligned}$$

$$(d_n - \frac{1}{12n}) - (d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}) < 0 \tag{1.15}$$

observemos que : $d_n - d_{n+1} \geq 0$, es decir $(d_n)_{n\geq 0} \searrow$, lo cual implica que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} d_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, por otro lado (1.15) implica que $(d_n - \frac{1}{12n})_{n\geq 1} \nearrow$ por lo que $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} d_n \in \mathbb{R}$. Hemos probado que :

$$\log n! - [\alpha + (n + \frac{1}{2})\log n - n] \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

lo cual nos dice que: $n! \approx e^{\alpha} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, por último cabe hacer notar que por aproximaciones gaussianas se prueba que: $e^{\alpha} = \sqrt{2\pi}$ □

Ejemplo 4. Paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^2$. Tenemos que $I = \mathbb{Z}^2$, y la matriz de transición en este caso es:

$$p_{\vec{i},\vec{j}} = p_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| = 1 \end{cases}$$

donde $|\vec{i} - \vec{j}| = |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2|$, la cadena es irreducible pues, $p_{\vec{i},\vec{j}}^{(|\vec{i}-\vec{j}|)} \geq (\frac{1}{4})^{|\vec{i}-\vec{j}|} > 0$ (es decir hay una sola clase), es de periodo 2 porque:

$$\begin{aligned} p_{\vec{i},\vec{i}}^{(2n)} &= \underbrace{\left\{\#\text{caminos de } (\vec{i} \text{ a } \vec{i})\text{de largo } 2n\right\}}\left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \\ &= \sum_{\substack{0\leq r,s\leq n \\ r+s=n}} \binom{2n}{r}\binom{2n-r}{r}\binom{2n-2r}{s} \end{aligned}$$

con r:"n^o instantes que voy a la derecha ", s:"n^o instantes que voy hacia arriba " y como:

$$\binom{2n}{r}\binom{2n-r}{r}\binom{2n-2r}{s} = \frac{(2n)!}{r!r!s!s!} \qquad \text{se tiene que :}$$

$$\begin{aligned} p_{\vec{i}.\vec{i}}^{(2n)} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{r=0}^{n} \frac{(2n)!}{(r!)^2((n-r)!)^2} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2\right)\binom{2n}{n} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \underbrace{\left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\right)}_{=\binom{2n}{n}} \binom{2n}{n} = \left(\binom{2n}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \\ &= \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \end{aligned}$$

Por la fórmula de Stirling, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \approx \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}(n^{n+\frac{1}{2}})^2}\right)^2 = \frac{2^{4n+1}}{2\pi}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = 2^{4n+1}\frac{1}{2\pi n}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n\geq n_0} p^{(2n)}_{\vec{i}.\vec{i}} \approx \sum_{n\geq n_0}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \approx \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{\pi n} = \infty$$

para n_0 suficientemente grande dado por la convergencia de la fórmula de Stirling . Así el paseo simétrico bidimensional es recurrente.

Ejemplo 5. Paseo simétrico en $I = \mathbb{Z}^3$. La matriz de transición en este caso es :

$$p_{\vec{i},\vec{j}} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } |\vec{i}-\vec{j}| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{donde} \quad |\vec{i}-\vec{j}| = \sum_{l=1}^{3}|\vec{i}_l - \vec{j}_l|$$

el paseo es irreducible (es decir hay una sola clase de equivalencia) y es de período 2, analicemos la recurrencia:

$$p^{(2n)}_{\vec{i},\vec{i}} = \sum_{0\leq r+s\leq n}\frac{(2n)!}{(r!)^2(r!)^2((n-r)!)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}$$

donde: r:“a la derecha”, s:“arriba”, $n-r-s$:“ afuera”, probaremos que el paseo simétrico en $\mathbb{Z}^3$ es transiente, es decir : $\sum\limits_{n\geq 0} p^{(2n)}_{\vec{i},\vec{i}} < \infty$. Para ello establezcamos una cota superior, sea :

$$c_n = \max\left\{ \frac{n!}{r!s!(n-r-s)!} \;\middle|\; 0\leq r,s\leq n, \quad \text{tal que} \quad r+s\leq n \right\}$$

$$\approx \frac{n!}{((\frac{n}{3})!)^3} \qquad \text{usando Stirling, luego se tiene la desigualdad:}$$

$$p^{(2n)}_{\vec{i},\vec{i}} \leq \frac{(2n)!}{((\frac{n}{3})!)^3}\left\{\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r}\frac{n!}{r!s!(n-r-s)!}\right\}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n} = \sum_{r=0}^{n-r}\frac{n!}{r!(n-r)!}\underbrace{\left(\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n-r}{s}\right)}_{2^{n-r}}$$

$$\leq \frac{(2n)!}{((\frac{n}{3})!)^3 n!}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\underbrace{\left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{-r}\right\}}_{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{(2n)!}{((\frac{n}{3})!)^3 n!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\text{por Stirling} \quad p^{(2n)}_{\vec{i},\vec{i}} \approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(e^{-\frac{n}{3}})^3((\frac{n}{3})^{\frac{n}{3}+\frac{1}{2}})^3 e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{3^{\frac{3}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{3}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \text{cte}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{luego ,} \sum_{n\geq 0} p^{(2n)}_{\vec{i},\vec{i}} < \infty \ \text{ y así el paseo simétrico en } \mathbb{Z} \text{ es transiente.}$$

Observación. Si $m \geq 3$, el paseo simétrico en $\mathbb{Z}^m$ es transiente.

Ejemplo 6. Cadenas de Markov de Nacimiento y Muerte . El conjunto de estados es $I = \mathbb{N}$ la matriz de transición es:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ p_i & \text{si } j = i+1 \\ r_i & \text{si } j = i \\ q_i & \text{si } j = i-1 \end{cases} \qquad \text{con } \; p_i + q_i + r_i = 1, \; q_0 = p_{-1} = 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$$

por lo tanto tiene la siguiente estructura:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & q_n & r_n & p_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

para evitar casos triviales se asumirá que : $p_i > 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$, $q_i > 0 \; \forall i \geq 1$ esto implica que la cadena es irreducible . Ella es de período 1 si algún $r_i > 0$, si no es de período 2, ahora analicemos la recurrencia y la recurrencia positiva:

(a) Recurrencia: Sea $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ estudiaremos las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} y_j = y_i \quad \forall i \neq 0 \quad (*) \text{ (por ser P estocástica, } y = cte \text{ es sol.)}$$

por la estructura de P este sistema $(*)$ queda:

$$y_i = q_i y_{i-1} + r_i y_i + p_i y_{i+1} \quad \forall i \geq 1. \tag{1.16}$$

$$\Rightarrow \; (p_i + q_i) y_i = q_i y_{i-1} + p_i y_{i+1} \; \Rightarrow \; (y_{i+1} - y_i) = \frac{q_i}{p_i}(y_i - y_{i-1}) \quad \forall i \geq 1$$

$$\text{luego,} \quad y_{i+1} - y_i = \left(\prod_{l=1}^{i} \frac{q_l}{p_l} \right) (y_1 - y_0) \quad \forall i \geq 1 \text{ } (i = 0 \text{ por inspección})$$

$$\text{como } \; y_i = \sum_{r=1}^{i} (y_r - y_{r-1}) + y_0 \; \Rightarrow y_i = \Big[\sum_{r=1}^{i} \Big(\prod_{l=1}^{r-1} \frac{q_l}{p_l} \Big) \Big] (y_1 - y_0) + y_0 \quad \forall i \geq 2$$

(también se tiene para $i = 0, 1$), del hecho que el espacio lineal de las soluciones de (1.16) es bidimensional y generado por $\{y_0, y_1\}$ se concluya que:

$$\bullet y_1 = y_0 \Rightarrow y_i = y_0 \quad \forall i \geq 0 \Rightarrow y = \text{cte}$$

$$\bullet y_1 \neq y_0 \Rightarrow y = (y_i)_{i\geq 0} \text{ es acotada ssi } \sum_{r=1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{r-1}\frac{q_l}{p_l}\right) < \infty \tag{1.17}$$

luego si (1.17) se verifica se tiene que existe solución acotada no constante . Recíprocamente si (1.17) no se verifica se tendrá que la única solución acotada son las constantes , así concluimos que la cadena de nacimiento y muerte es **recurrente** ssi $\sum_{r=1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{r-1}\frac{q_l}{p_l}\right) = \infty$

Observación. En el caso $p_l = p \quad \forall l \geq 0$, $q_l = q \quad \forall l \geq 1$ la cadena es recurrente si $q \geq p$.

(b) Recurrencia positiva la cadena será recurrente positiva ssi es recurrente y $\exists$ distribución estacionaria $\pi = (\pi_i)_{i\geq 0}$, es decir, verifica $\pi_i \geq 0 \quad \forall i \geq 0$, satisfaciendo:

$$\sum_{i\geq 0}\pi_i = 1, \quad \pi_j = \sum_{i\in\mathbb{N}}\pi_i p_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

esta última ecuación (condición de estacionalidad) en nuestro caso se traduce en :

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1 \\
\pi_j &= \pi_{j-1}p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1}q_{j+1} \quad \forall j \geq 1
\end{aligned}$$

este sistema de ecuaciones tiene solución unidimensional (parametrizada po π_0), luego estas ecuaciones se reescriben ($1 - r_j = p_j + q_j$) ($q_0 = 0$) :

$$\pi_0 p_0 = \pi_1 q_1 \tag{1.18}$$
$$\pi_j(p_j + q_j) = \pi_{j-1}p_{j-1} + \pi_{j+1}q_{j+1} \tag{1.19}$$

se tiene que el espacio solución esta dado por :

$$\pi_j = \left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)\pi_0 \quad \forall j \geq 0$$

verifiquemos que esta es la solución , (1.18) se cumple, en (1.19) la igualdad se lee como sigue:

$$\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)p_j + \left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)q_j = \left(\prod_{l=0}^{j-2}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)p_{j-1} + \left(\prod_{l=0}^{j}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)q_{j+1}$$

$$\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)p_j = \left(\prod_{l=1}^{j}\frac{p_l}{q_l}\right)p_0 = \left(\prod_{l=0}^{j}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)q_{j+1} \quad \text{y similarmente:}$$

$$\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)q_j = \left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_l}\right)p_0 = \left(\prod_{l=0}^{j-2}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)p_{j-1} \quad \text{así se tiene (1.19)}$$

luego $\exists\ (\pi_i)_{i\geq 0}$ distribución estacionaria ssi $\exists\ \pi_0$ tal que:

$$\left[\sum_{j\geq 0}\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)\right]\pi_0 = 1 \quad \text{,esto ocurre ssi} \quad \left[\sum_{j\geq 0}\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)\right] < \infty$$

por lo tanto la cadena de nacimiento y muerte es recurrente positiva ssi:

$$\text{(recurrente)} \quad \left[\sum_{j\geq 0}\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)\right] = \infty$$

$$(\exists \;\text{ distribución estacionaria}) \quad \left[\sum_{j\geq 0}\left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{p_l}{q_{l+1}}\right)\right] < \infty$$

Observación. Si $p_l = p \quad \forall l \geq 0, q_l = q \quad \forall l \geq 0$, es recurrente positva si $q > 0$, y por lo tanto si $q < p$ es transiente , si $q = p$ es recurrente nula y si $q > p$ es recurrente positiva.

Antes del próximo ejemplo, analicemos la siguiente:

Proposición 30 (Evolución de estados transientes). *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a estados en E, con matriz de transición P . Denotemos por T al conjunto de estado transientes de la cadena, para $i \in T$ consideremos:*

$$z_i = \mathbb{P}_i\{X_n \in T \quad \forall n \geq 0\}$$

se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$z_i = \sum_{j\in T} p_{ij} z_j \quad \forall i \in T$$

Demostración.

Ejercicio 15.

□

sea $i \in T$, consideremos C clase recurrente y:

$$\mathcal{U}_i(C) \doteq \mathbb{P}_i\{\exists n > 0 : X_n \in C\} = \mathbb{P}_i\{\exists n > 0 : \forall m \geq n, X_m \in C\}$$

se tiene que $\mathcal{U}(C) = (\mathcal{U}_i(C))_{i\in T}$ verifica el sistema de ecuaciones :

$$\sqcap(C)_i = \sum_{l\in C} p_{il} + \sum_{j\in T} p_{ij}\sqcap_j(C) \quad \forall i \in T$$

Demostración.

Ejercicio 16.

$\square$

Ejemplo 7 (Ruina de un jugador). . Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov a estados en $I=\{0,\dots,N\}$ con la suguiente matriz de transición:

$$p_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } i=j=0 \\ q & \text{si } j=i-1 \\ p & \text{si } j=i+1 \\ 1 & \text{si } j=i=N \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \text{con } p+q=1 \quad (0<p<1)$$

luego la matriz tiene la siguinte estructura:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & q & 0 & p \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hay 3 clases de equivalencia $C_0=\{0\},C_N=\{N\}$ las cuales son recurrentes postivas ($\{0\},\{N\}$ son estados absorbentes) y $T=\{1,\dots,N-1\}$ la cual es transiente. Tenemos:

$$z_i=\mathbb{P}_i\{X_n\in T \quad \forall n\geq 0\}, i\in T \text{ verifica} \qquad z_i=\sum_{j\in T}p_{ij}z_j \quad \forall i\in T$$

la única solución es $z=\vec{0}$ en efecto:

$$\begin{aligned} z_1 &= pz_2 \;\Rightarrow\; z_1<z_2 \\ z_2 &= qz_1+pz_3<qz_2+pz_3 \;\Rightarrow\; z_2<z_3\dots \\ z_i &= qz_{i-1}+pz_{i+1} \;\Rightarrow\; z_i<z_{i+1}\dots \\ z_{N-2} &= qz_{N-3}+pz_{N-1} \;\Rightarrow\; z_{N-2}<z_{N-1} \\ z_{N-1} &= qz_{N-2} \;\Rightarrow\; z_{N-1}<z_{N-2} \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, luego $\mathbb{P}_i\{X_n\in T,\forall n\geq 0\}=0 \quad \forall \quad 1\leq i\leq N-1$, (en algún momento el juego para). Definamos $\mu_i=\mu_i^{(N)}$ (probabilidad de ruina) como :

$$\mu_i=\mathbb{P}_i\{X_n=0 \text{ para algún n}\} \quad i\in\{0,\dots,N\}$$

se tiene que $\mu_0=1,\mu_N=0$, y μ_i verifica el sistema de ecuaciones :

$$\mu_i(C)=\sum_{l\in C}p_{il}+\sum_{j\in T}p_{ij}\mu_j(C) \quad \forall i\in T$$

por lo tanto queda:

$$\mu_i = q\mu_{i-1} + p\mu_{i+1} \quad \forall i = 1, \ldots, N-1.$$

con condiciones de borde $\mu_0 = 1, \mu_N = 0$, hay dos casos a estudiar:

(i) $p \neq q$ se tiene que:

$$\mu_i = Ax_-^i + Bx_+^i \quad \text{donde } x_\pm \text{ son las soluciones de:}$$

$$x = q + px^2 \quad \Rightarrow x_\pm = \frac{1}{2p}(1 \pm \sqrt{1-4pq})$$

$$\mu_0 = 1 \ \Rightarrow A + B = 1$$

$$\mu_N = 0 \ \Rightarrow Ax_-^N + Bx_+^N = 0 \quad \text{y esto tiene como solución}$$

$$\mu_i^N = \mu_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \quad i = 1, \ldots, N-1 \ \text{ también } i = 1, N$$

(ii) $p = q = \frac{1}{2}$

$$\mu_i = \frac{1}{2}\mu_{i-1} + \frac{1}{2}\mu_{i+1};\ \mu_0 = 1, \mu_N = 0$$

la solución es la lineal $\mu_i = A + Bi$ con $A = 1, A + BN = 0 \ \Rightarrow B = \frac{-1}{N} \ \Rightarrow \mu_i = 1 - \frac{i}{N} = \frac{N-i}{N} \quad i = 0, \ldots, N$.

Observación. Sea $\upsilon_i^{(N)} = \upsilon_i = \mathbb{P}_i\{X_n = N, \text{ para álgun n}\}$ se tiene que $\upsilon_i = 1 - \mu_i \quad i = 0, \ldots, N$ pues $\mathbb{P}_i = \{(\exists n : X_n = N)^c\} = \mathbb{P}_i\{(\exists n : X_n = 0) \cup (\forall n : X_n \in T)\}$

Ejemplo 8 (Ruina de un jugador contra el casino). El conjunto de estados $I = \mathbb{N}$, para una cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ por lo tanto la matriz de transición tiene la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ q & 0 & p & & \\ & q & 0 & p & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

se tiene que $\{0\}$ es clase absorbente, luego es recurrente , por otra parte $T = \{1, 2 \ldots\}$ es una clase transiente . Definamos:

$$\mu_i \doteq \mathbb{P}_i\{\exists n \ \mid \ X_n = 0\} \quad i \in \mathbb{N}$$

que es la probabilidad de ruina del jugador, se verifica lo siguiente :

$$\mu_i = \lim_{N\to\infty} \mu_i^N = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq \frac{1}{2}, \text{ es decir } q \geq p \\ \left(\frac{q}{p}\right)^i & \text{si } p \geq \frac{1}{2}, \text{ es decir } q < p \end{cases}$$

probemos que : $\mu_i = \lim_{N\to\infty} \mu_i^N$,definamos :

$$T_N = \inf_{n\geq 0} \{X_n = N\}$$

sea $i \in T$, tomemos $N > i$, se tiene que :

$$X_n^N = X_n \, \mathbb{1}_{\{n\leq T_N\}} + N \, \mathbb{1}_{\{n>T_N\}}$$

es una cadena de Markov correspondiente al caso de la ruina con fortuna total N, luego:

$$\begin{aligned} \mu_i^n &= \mathbb{P}_i \left\{\exists n \;\mid\; X_n^N = 0\right\} = \mathbb{P}_i \left\{\exists n \;\mid\; X_n \, \mathbb{1}_{\{n\leq T_N\}} + N \, \mathbb{1}_{\{n>T_N\}} = 0\right\} \\ &= \mathbb{P}_i \{\exists n < T_N ; X_n = 0\}, \quad \text{luego calculamos el límite :} \\ \lim_{N\to\infty} \mu_i^{(N)} &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_i \{\exists n < T_N, X_n = 0\} = \mathbb{P}_i \left\{ \bigcup_N \{\exists n < T_N \;\mid\; X_n = 0\} \right\} \\ &= \mathbb{P}_i \{\exists n, X_n = 0\} = \mu_i \end{aligned}$$

1.13. Couplings

Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, sean $(X_n)_{n\geq 0}$,$(X'_n)_{n\geq 0}$ cadenas de Markov **independientes** con matriz de transición P a estados en I, la independencia significa :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_k} = i_k, X'_{s_1} = j_1, \ldots, X'_{s_l} = j_l\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_k} = i_k\right\} \mathbb{P}\left\{X'_{s_1} = j_1, \ldots, X'_{s_l} = j_l\right\} \\ &\quad \forall\; t_1, \ldots t_k, s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{N}, \quad i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \in I \end{aligned}$$

Ejercicio 17. Probar que $Y_n = (X_n, X'_n)_{n\geq 0}$ define una cadena de Markov a valores en $I \times I$ con matriz de transición :

$$\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = p_{i_1 j_1} p_{i_2 j_2} : (i_1, i_2); (j_1, j_2) \in I \times I)$$

observemos que la distribución inicial de $(Y_n)_{n\geq 0}$ es :

$$\mathbb{P}\{Y_0 = (i_0, i'_0)\} = \mathbb{P}\{X_0 = i_0\} \, \mathbb{P}\{X'_0 = i'_0\} \quad \text{para } (i_0, i'_0) \in I \times I$$

consideremos:

$$T = \inf_{n\geq 0} \{X_n = X'_n\}$$

resulta ser tiempo de parada con respecto a $\widetilde{\mathcal{F}}_0^n = \sigma(Y_k = (X_k, X'_k) : k \leq n,\; n \geq 0)$ pues :

$$\begin{aligned} \{T = n\} &= \{X_l \neq X'_l,\; l < n;\; X_n = X'_n\} \;\in \widetilde{\mathcal{F}}_0^n \\ &= \{Y_l \in D^c(I \times I),\; l < n,\; Y_n \in D(I \times I)\} \;\in \widetilde{\mathcal{F}}_0^n \end{aligned}$$

donde $D^c(I \times I) = I \times I \setminus D(I \times I)$ con $D(I \times I) = \{(i, i) : i \in I\}$.

Proposición 31. *Sea I finito, con P irreducible aperíodica entonces:*

$$\forall (i,i) \in I \times I, \quad \mathbb{P}_{(i,i')}\{T < \infty\} = 1$$

Demostración. Por irreducibilidad, finitud y aperiodicidad se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 \ , \exists N \quad \text{tal que:} \quad p_{ij}^{(N)} \geq \varepsilon \quad \forall i,j \in I$$

consideremos las cadenas independientes: $(X_{KN})_{K\geq 0}, (X_{KN})'_{K\geq 0}$ se tiene que:

$$\mathbb{P}_{(i,i')}\{T > nN\} \leq \mathbb{P}_{(i,i')}\{X_{kN} \neq X'_{kN}; \quad k = 0, \ldots, n\} \tag{1.20}$$

por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(i,i')}\left(\prod_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\left\{X_{kN}\neq X'_{kN}\right\}}\right) &= \mathbb{E}_{(i,i')}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\left\{X_{kN}\neq X'_{kN}\right\}} |\widetilde{\mathcal{F}}_0^{(n-1)N}\right)\right) \\
= \mathbb{E}_{(i,i')}\left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left\{X_{kN}\neq X'_{kN}\right\}} \mathbb{E}_{(X_{(n-1)N}X'_{(n-1)N})}(\mathbb{1}_{\left\{X_{N}\neq X'_{N}\right\}})\right) &\text{(propiedad de Markov)}
\end{aligned}$$

se tiene que si $l \neq l'$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(l,l')}(\mathbb{1}_{\left\{X_{kN}\neq X'_{kN}\right\}}) &= \mathbb{P}_{(l,l')}\{X_N \neq X'_N\} = \sum_{j\neq j'} p_{lj}^{(N)} p_{l'j'}^{(N)} = 1 - \sum_{j\in I} p_{lj}^{(N)} p_{l'j'}^{(N)} \\
&\leq (1 - |I|\varepsilon^2) \quad \text{luego usando (1.20) se tiene que:} \\
\mathbb{P}_{(i,i')}\{T > nN\} &\leq \mathbb{P}_{(i,i')}\{X_{kN} \neq X'_{kN} \quad | \quad k = 0, \ldots, n\} \\
&\leq (1 - |I|\varepsilon^2)\mathbb{P}_{(i,i')}\{X_{kN} \neq X'_{kN} \quad | \quad k = 0, \ldots, n-1\} \\
\text{iterando queda:} & \\
\mathbb{P}_{(i,i')}\{T > nN\} &\leq (1 - |I|\varepsilon^2)^n \to 0 \quad \text{si } n \to \infty
\end{aligned}$$

luego: $\mathbb{P}_{(i,i')}\{T < \infty\} = 1$ □

Proposición 32. *T tiene decaimiento exponencial uniformemente en la condición inicial, es decir $\exists c \in (0,\infty), \alpha \in (0,1)$ tal que $\forall (i,i') \in I \times I$ (E finito) se tiene:*

$$\mathbb{P}_{(i,i')}\{T > k\} \leq c\alpha^k \quad \forall k \geq 0$$

Demostración.

$$\mathbb{P}_{(i,i')}\{T > k\} \leq \mathbb{P}_{(i,i')}\left\{T > \left[\frac{k}{N}\right]N\right\} \leq (1 - |I|\varepsilon)^{\left[\frac{k}{N}\right]} \leq c\,\underbrace{\left\{(i - |I|\varepsilon)^{\frac{1}{N}}\right\}}_{\alpha}{}^{k}$$

□

Volvamos al caso inicial: sean $(X_n)_{n\geq 0}, (X'_n)_{n\geq 0}$ cadenas de Markov con matriz de transición P, supongamos que se tiene lo siguiente:

$$\forall i, i' \in I \quad \mathbb{P}_{(i,i')}\left\{T < \infty\right\} = 1$$

lo cual se cunple si I es finito y P es irreducible, aperíodica, definamos:

$$X''_n \doteq X'_n \, \mathbb{1}_{\{n\leq T\}} + X_n \, \mathbb{1}_{\{n>T\}} \quad \forall n \geq 0$$

Proposición 33. $(X''_n)_{n\geq 0}$ *es una cadena de Markov con matriz de transición P y condición inicial:*

$$(\forall i \in I) \quad \mathbb{P}\left\{X''_0 = i\right\} = \mathbb{P}\left\{X'_0 = i\right\}$$

es decir (X'_n) y (X''_n) tienen igual distribución.

Demostración. Como $\mathbb{P}\left\{T < \infty\right\} = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{X''_0 = i_0, \ldots, X''_l = i_l\right\} = &\sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}\left\{X''_0 = i_0, \ldots, X''_l = i_l, T = k\right\} \\ &+ \underbrace{\sum_{k\geq l+1} \mathbb{P}\left\{X''_0 = i_0, \ldots, X''_l = i_l, T = k\right\}}_{\mathbb{P}\left\{X''_0=i_0,\ldots,X''_l=i_l,T>l\right\}}\end{aligned} \tag{1.21}$$

ahora bien, sea $k \leq l$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{X''_0 = i_0, \ldots, X''_l = i_l, T = k\right\} =& \mathbb{P}\left\{X'_0 = i_0, \ldots, X'_{k-1} = i_{k-1}, X'_k = i_k,\right. \\ &\left. X_0 \neq i_0, \ldots, X_{k-1} \neq i_{k-1}, X_k = i_k, \ldots, X_l = i_l\right\} \\ \text{(por independencia)} \;=& \mathbb{P}\left\{X'_0 = i_0, \ldots, X'_k = i_k\right\} \mathbb{P}\left\{X_0 \neq i_0, \ldots, X_k = i_k, \ldots, X_l = i_l\right\}\end{aligned} \tag{1.22}$$

por otra parte se tiene análogamente que:

$$\mathbb{P}\left\{X''_0 = i_0, \ldots, X''_l = i_l, T > l\right\} = \mathbb{P}\left\{X'_0 = i_0, \ldots, X'_l = i_l\right\} \mathbb{P}\left\{X_0 \neq i_0, \ldots, X_l \neq i_l\right\}$$

pero:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{X_0 \neq i_0, \ldots, X_{k-1} \neq i_{k-1}, X_k = i_k, \ldots, X_l = i_l\right\} =& \mathbb{P}\left\{X_0 \neq i_0, \ldots, X_{k-1} \neq i_{k-1}, X_k = i_k\right\} \\ &\cdot \mathbb{P}_{i_k}\left\{X_1 = i_{k+1}, \ldots, X_{l-k} = i_l\right\}\end{aligned}$$

esto último en (1.22) $\Rightarrow$:

$$\mathbb{P}\left\{X'_0 = i_0, \ldots, X'_k = i_k\right\} \mathbb{P}_{i_k}\left\{X_1 = i_{k+1}, \ldots, X_{l-k} = i_l\right\} = \mathbb{P}\left\{X'_0 = i_0, \ldots, X'_l = i_l\right\} \tag{1.23}$$

por otro lado (1.23) en (1.21) y la propiedad markoviana en (X'_n) implican:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}\left\{X''_0 = i_0, \ldots, X''_l = i_l, T = k\right\} = &\sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}\left\{X'_0 = i_0, \ldots, X'_l = i_l\right\} \\ &\cdot \mathbb{P}\left\{X_0 \neq i_0, \ldots, X_{k-1} \neq i_{k-1}, X_k = i_k\right\}\end{aligned}$$

resumiendo se tiene que:

$$\mathbb{P}\left\{X_0'' = i_0, \ldots, X_l'' = i_l\right\} = \mathbb{P}\left\{X_0' = i_0, \ldots, X_l' = i_l\right\}$$

usando esto último tenemos lo siguiente:

$$= \sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}\left\{X_0 \neq i_0, \ldots, X_{k-1} \neq i_{k-1}, X_k = i_k\right\} + \mathbb{P}\left\{X_0 = i_0, \ldots, X_l = i_l\right\}$$

luego:

$$\sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}\left\{X_s \neq i_s, s < k, X_k = i_k\right\} + \mathbb{P}\left\{X_s \neq i_s, s = 0, \ldots, l\right\} = 1$$

porque lo anterior es una partición del espacio, por lo tanto se concluye que (X_n') es cadena de Markov. □

Teorema 4. *Sea I finito, y consideremos $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ cadena de Markov con matriz de transición P irreducible y aperíodica, entonces la convergencia al equilibrio es exponencial, es decir :*

$$\exists c \in (0,\infty), \;\; \alpha \in (0,1) \quad \textit{tal que} \quad \sup_{i,j\in I} |p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq c\alpha^n \quad \forall n \geq 0$$

donde $\pi = (\pi_j)_{j\in I}$ representa una distribución estacionaria.

Demostración. sea $(X_n)_{n\geq 0}, (X_n')_{n\geq 0}$ cadenas de Markov independientes con matriz de transición P, consideremos:

$$\mathbb{P}\left\{X_0 = j\right\} = \delta_{ij}, \quad \mathbb{P}\left\{X_0' = j\right\} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

es decir $(X_n)_{n\geq 0}$ parte del estado i,$(X_n')_{n\geq 0}$ parte de la distribución $\pi = (\pi_j, j \in I)$, se tiene lo siguiente:

$$X_n'' = X_n' \, \mathbb{1}_{\{n\leq T\}} + X_n \, \mathbb{1}_{\{n>T\}}$$

es una cadena de Markov con igual distribución que $(X_n')_{n\geq 0}$, luego:

$$\mathbb{P}\left\{X_n'' = j\right\} = \mathbb{P}_\pi\left\{X_n'' = j\right\} = \pi_j \quad \text{pues } \pi \text{ es estacionaria}$$

y como $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left\{X_n = j\right\} = \mathbb{P}_i\left\{X_n = j\right\}$ se tiene que:

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| = |\mathbb{P}\left\{X_n = j\right\} - \mathbb{P}\left\{X_n'' = j\right\}| = |\mathbb{P}\left\{X_n = j, n \geq T\right\} +$$

$$\mathbb{P}\left\{X_n = j, n < T\right\} - \mathbb{P}\left\{X_n'' = j, n \geq T\right\} - \mathbb{P}\left\{X_n'' = j, n < T\right\}|$$

del hecho que : $\left\{X_n'' = j, T \leq n\right\} = \left\{X_n = j, T \leq n\right\}$ se deduce que:

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq |\mathbb{P}\left\{X_n = j, n \leq T\right\} - \mathbb{P}\left\{X_n'' = j, n < T\right\}| \leq \mathbb{P}_{(i,\pi)}\left\{T > n\right\} \leq c\alpha^n$$

gracias a la **Proposición 1.14.2** □

2. Teoría de Renovación

Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias **idd** (independientes e idénticamente distribuidas) no negativas ($X_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$). Sea F la función de distribución de X_n ($X_n \sim F$) es decir:

$$F(t) = \mathbb{P}\{X_n \leq t\} \quad t \in [0, \infty)$$

se tiene que $F(0^-) = 0$, F es creciente (lo notaremos F$\nearrow$),$F(\infty) = 1$, F continua por la derecha. Para evitar casos que no corresponden a la teoría, asumiremos que $F(0) < 1$. Notemos :

$$\mu = \mathbb{E}(X_n) = \int_0^\infty t dF(t) \quad \in (0, \infty] \quad \textbf{(vida media)}$$

se tiene que:

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(t))dt$$

Definamos $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + X_n \quad \forall n \geq 1$ luego $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, diremos que $(S_n)_{n\geq 1}$ son los **instantes de renovación**. Consideremos :

$$N(t) = \sup_{n\geq 0} \{S_n \leq t\} \quad \text{para } t \geq 0$$

que corresponde al número de renovaciones de renovaciones hechas hasta el tiempo t. A la familia de variables aleatorias $(N(t))_{t\geq 0}$ se le llama **proceso de renovación** el cual es creciente (es decir : $N(t) \leq N(t')$ si $t \leq t'$) . Veamos que $N(t) < \infty \quad \mathbb{P}$-c.s, en efecto por el **Teorema de los grandes números** :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

como $\mu > 0$ se deduce que : $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \mathbb{P}$-c.s y de aquí se concluye que :

$$N(t) = \sup_{n\geq 0} \{S_n \leq t\} < \infty \quad \mathbb{P}\text{-c.s} \quad \forall t \geq 0$$

luego podemos escribir:

$$N(t) = \max_n \{S_n \leq t\}$$

y se tiene la igualdad de conjuntos:

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\} \Rightarrow \{N(t) = n\} = \{S_n \leq t\} \setminus \{S_{n+1} \leq t\}$$

por otra parte si notamos : $N(\infty) = \lim\limits_{t\nearrow\infty} N(t)$ implica que $\mathbb{P}\{N(\infty) = \infty\} = 1$, en efecto:

$$N(\infty) < \infty \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \text{ de modo que :}$$

$$X_k = \infty \Rightarrow \mathbb{P}\{N(\infty) < \infty\} \leq \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{X_k = \infty\} = 0$$

Denotemos por F^{n*} a la n-ésima convolución de F, es decir :

$$F^{n*} = \underbrace{F * \cdots * F}_{n-veces}$$

donde :

$$F^{0*} = H_0(t), \quad F^{1*} = F, \quad F^{(n+1)*}(t) = \underbrace{\int_0^t F^{n*}(t-x)dF(x)}_{(F*F^{n*})(t)}$$

Observación.

Para $F, G \nearrow$, con $F(0^-)G(0^-) = 0$ su producto de convolución esta dado por:

$$(F * G)(t) = \int_0^t G(t-x)dF(x).$$

Para$X \sim F, Y \sim G$ independientes $\Rightarrow X + Y \sim F * G$ pues:

$$\mathbb{P}\{X + Y \leq t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\{X + Y \leq t \mid X = x\} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x)$$

$$\text{ya que : } \quad \mathbb{P}\{Y \leq t - x \mid X = x\} = \mathbb{P}\{Y \leq t - x\} = G(t-x)$$

la función $H_c(t)$ para $c \in \mathbb{R}$ se define como:

$$H_c(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq c \\ 0 & \text{si } t < c \end{cases} \qquad \textbf{Escalón unitario, o función de Heaviside}$$

Definición 18. *Se define la llamada* ***función de renovación*** *como :*

$$m(t) = \mathbb{E}(N(t))$$

Proposición 34. $m(t) = \sum\limits_{n\geq 1} F^{n*}(t)$

Demostración.

$$N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} \Rightarrow m(t) = E(N(t)) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}})$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = \sum_{n\geq 1} F^{n*}(t)$$

$\square$

Proposición 35. *Se tiene que* $m(t) < \infty \quad \forall t \geq 0$, *y en general* $\mathbb{E}(N(t)^r) < \infty \quad \forall t \geq 0, \forall r \geq 1$

Demostración. Como $F(0) = \mathbb{P}\{X_k = 0\} < 1$ se tiene que $\exists \alpha > 0$ tal que $\underbrace{F(\alpha)}_{\beta} < 1$ (gracias a la continuidad por la derecha) . Definamos $(\bar{X}_k)_{k\geq 1}$ a partir de $(X_k)_{k\geq 1}$ de la siguiente manera :

$$\bar{X}_k = \begin{cases} \alpha & \text{si } \bar{X}_k > \alpha \\ 0 & \text{si } \bar{X}_k \leq \alpha \end{cases}$$

Se tiene que $(\bar{X}_k)_{k\geq 1}$ estan iid (pues las $(X_k)_k$ lo estan) con $\bar{X}_k \sim \bar{F}$ donde

$$\bar{F}(0) = \mathbb{P}\left\{\bar{X}_k = 0\right\} = F(\alpha) = \beta.$$

Por otra parte $\mathbb{P}\left\{\bar{X}_k = \alpha\right\} = 1 - \beta > 0$ (pues $\beta < 1$), ádemas:

$$\begin{aligned} \bar{X}_k \leq X_k \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow & \bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{X}_k \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \\ \Rightarrow & \bar{N}(t) \leq N(t) \quad \text{luego} \quad \mathbb{E}(N(t)^r) \leq \mathbb{E}(\bar{N}(t)^r) \quad \forall r \geq 1 \end{aligned}$$

por lo tanto basta Probar que: $\mathbb{E}(\bar{N}(t)^r) < \infty$, en efecto:

$$\mathbb{E}(\bar{N}(t)^r) = \sum_{q\geq 1} q^r \mathbb{P}\left\{\bar{N}(t) = q\right\} \quad \text{y notemos que:}$$

$$\mathbb{P}\left\{\bar{N}(t) = q\right\} = \mathbb{P}\left\{\bar{N}(\left[\frac{t}{\alpha}\right]\alpha) = q\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } q < [\frac{t}{\alpha}] \\ \binom{q}{[\frac{t}{\alpha}]} \beta^{q-[\frac{t}{\alpha}]} (1-\beta)^{[\frac{t}{\alpha}]} & \text{si } q \geq [\frac{t}{\alpha}] \end{cases}$$

luego:

$$\mathbb{E}(N(t)^r) < \infty \quad \text{pues} \quad \sum_{q\geq 1} \binom{q}{l} q^r \beta^q < \infty \quad \text{pues } \beta \in (0,1)$$

$\square$

Definición 19. *Previo al próximo resultado, definamos la siguientes variables aleatorias:*

(i) $S_{N(t)}$ *: "Instante de última renovación antes o en el tiempo t".*

(ii) $S_{N(t)+1}$ *: "Instante de la primera renovación después del tiempo t".*

se tiene que : $S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$ *puntualmente.*

Proposición 36. *: Se tiene la siguiente convergencia.*

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\nearrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \quad \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Demostración. Consideremos la cota:

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)} \frac{(N(t)+1)}{N(t)} \tag{2.1}$$

por teorema fuerte de los grandes números se satisface que :

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu \quad \mathbb{P}\text{-c.s} \tag{2.2}$$

y análogamente :

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

en efecto :

$$N(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty, (\text{ ya que si } N(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} k < \infty \quad \text{se tendría que}$$

$$\exists l \geq 1 \text{ tal que } X_l = \infty y \mathbb{P}\left\{\exists l \geq 1 : X_l = \infty\right\} \leq \sum_l \mathbb{P}\left\{X_l = \infty\right\} = 0)$$

y $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \quad \mathbb{P}$-c.s, luego considerando los conjuntos:

$$A = \left\{\omega \in \Omega \;\mid\; \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\right\}$$

$$B = \left\{\omega \in \Omega \;\mid\; N(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty\right\}$$

se tiene que para $\omega \in A \cap B$:

$$\frac{S_{N(t)(\omega)}(\omega)}{N(t)(\omega)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu$$

del hecho que : $\mathbb{P}\left\{A \cap B\right\} = 1$ se tiene (2.2), usando esto en (2.1) y por teorema del sandwich se concluye que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mu \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

□

Teorema 5 (Wald). *Sean $(Y_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias iid, verificando al menos una de las siguientes condiciones:*

$$.Y_n \geq 0 \qquad . \,\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$$

Consideremos $\mathcal{F}^n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ y la función : $\mathcal{T} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ como tiempo de parada con respecto a $(\mathcal{F}^n)_{n\geq 1}$ (es decir $\{\mathcal{T} = n\} \in \mathcal{F}^n, \quad \forall n \geq 1$) además satisfaciendo $\mathbb{E}(\mathcal{T}) < \infty$, entonces:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{T}} Y_k\right) = \mathbb{E}(\mathcal{T})\mathbb{E}(Y_1) \qquad \textit{\textbf{(igualdad de Wald)}}$$

Demostración.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{T}} Y_k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{K\geq 1} \mathbb{1}_{\{k\leq \mathcal{T}\}} Y_k\right) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{k\leq \mathcal{T}\}} Y_k) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{k\leq \mathcal{T}\}})\mathbb{E}(Y_k)$$

(pues $\{k \leq \mathcal{T}\} = \{\mathcal{T} < k\}^c \in \mathcal{F}^{k-1}$, e Y_k independiente de $\mathcal{F}^{k-1}$)

$$= \mathbb{E}(Y_1)\left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{\mathcal{T} \geq k\}\right) = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{k\leq \mathcal{T}\}}\right) = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(\mathcal{T})$$

□

Observación. Si $\mathbb{E}(\mathcal{T}) = \infty$ puede que Wald no se cumpla, en efecto si consideramos:

$$(Y_n)_n \text{ iid} \quad , \mathbb{P}\{Y_n = \pm 1\} = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{T} = \left\{n \geq 1 : \sum_{k=1}^{n} Y_k = 1\right\}$$

se tiene $\mathbb{P}\{\mathcal{T} < \infty\} = 1$ pues es el paseo aleatorio simétrico

como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathcal{T}} Y_k = 1, \quad \mathbb{E}(Y_k) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{T}) = \infty.$ (y Wald no es cierto)

En el cuadro de teoría de renovación, se tiene que para todo t fijo la variable aleatoria $N(t) + 1$ es un tiempo de parada que toma valores en $\mathbb{N}^*$, en efecto para $n \geq 1$:

$$\{N(t) + 1 = n\} \Leftrightarrow \{N(t) = n - 1\} \Leftrightarrow \{S_{n-1} \leq t, S_n > t\}$$

además $\mathbb{E}(N(t) + 1) = m(t) + 1 < \infty$ luego se puede aplicar la igualdad de Wald:

$$\mathbb{E}(S_{N(t)+1}) = (m(t) + 1)\mu$$

pues:

$$S_{N(t)+1} = \sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n.$$

Proposición 37. *Se tiene el siguiente resultado de convergencia:*

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}$$

Demostración.

$$t \leq S_{N(t)+1} = \sum_{k=1}^{N(t)+1} X_k \quad \Rightarrow t \leq \mu(m(t) + 1) \quad \text{(Wald)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \leq \frac{m(t)}{t} + \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

Probemos la otra desigualdad, sea $M > 0$ definamos:

$$\bar{X}_k = X_k \, \mathbb{1}_{\{X_k \leq M\}} + M \, \mathbb{1}_{\{X_k > M\}}$$

se tiene que : $(\bar{X}_k)_{k\geq 1}$ son iid con $\bar{X}_K \leq X_k \quad \forall k \geq 1$, luego $\bar{S}_n \leq S_n \quad \forall n \Rightarrow \bar{N}(t) \geq N(t) \quad \forall t \geq 0$ y con esto se tiene que $\bar{S}_{\bar{N}(t)+1} \leq t + M$ (pues $\bar{S}_{\bar{N}(t)+1} - \bar{S}_{\bar{N}(t)} \leq M$), por Wald y llamando $\bar{\mu}_M = \mathbb{E}(\bar{X}_1)$ se deduce que:

$$\bar{\mu}_M(\bar{m}(t) + 1) \leq t + M \quad \Rightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_M}$$

haciendo $M \nearrow \infty$ y como $\bar{\mu}_M \nearrow \mu$ (por **TCM** junto con $\bar{X}_k \nearrow X_k$), se concluye que:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

$\square$

Consideremos F una función de distribución en $\mathbb{R}_+$ con $F(0) < 1$, como se vio anteriormente F define a F_n^* y:

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(t))dt = \int_0^\infty t dF(t)$$

$$m(t) = \sum_{n\geq 1} F^{n*}(t)$$

Definición 20. *Diremos que F es* ***aritmética*** *si $\exists d > 0$ tal que:*

$$\nu_F \{nd :, n \geq 0\} = 1 \quad (\text{ } \nu_F \textit{ es una medida de Probabilidad asociada a } F)$$

en caso contrario diremos que F es no aritmética.

Teorema 6. ***(Blackwell)***

(i) *Si F es no aritmética, $\forall a > 0$ se tiene:*

$$\lim_{t\to\infty} (m(t + a) - m(t)) = \frac{a}{\mu}$$

(ii) *Si F es aritmética entonces:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(\# \textit{ renovaciones en el punto } nd) = \frac{d}{\mu}$$

donde $\#$ renovaciones en $nd = N(nd) - N(nd^-) = N(nd) - N((n-1)d)$ pues F es aritmética.

Demostración. **(i)** Observemos lo siguiente, si se ha probado que:

$$l(a) := \lim_{t\to\infty}[m(t+a) - m(t)] \quad \forall a > 0 \quad \text{existe}$$

entonces es fácil mostrar que:

$$l(a) = \frac{a}{\mu}$$

en efecto, para $a, b \geq 0$ se tendría que :

$$\begin{aligned} l(a+b) &= \lim_{t\to\infty}(m(t+a+b) - m(t)) \\ &= \lim_{t\to\infty}[m(t+a+b) - m(t+b) + m(t+b) - m(t)] \\ &= l(a) + l(b) \quad \text{luego } l \text{ es lineal} \end{aligned}$$

entonces se tiene que $\exists\ \gamma$ tal que $l(a) = \gamma a \quad \forall a \geq 0$, así lo único que restaría por mostrar es que $\gamma = \frac{1}{\mu}$. En efecto:

$$\frac{m(n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(m(k) - m(k-1)) + \frac{m(0)}{n}$$

como: $\frac{m(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu}$ y $m(k) - m(k-1) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} l(1) = \gamma$ se obtiene $\gamma = \frac{1}{\mu}$ (pues si $a_k \to a \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a$)

(ii) Se demostrará más adelante

Observación. mejor se escribe $\lim_{n\to\infty}(m((n+1)d) - m(nd)) = \frac{d}{\mu}$

□

Aplicaremos el teorema de Blackwell a ciertas clases de funciones:

Definición 21. *Sea $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que h es directamente Riemann integrable si:*

(i) $\forall a \geq 0, \forall n \geq 1$, *se tiene que:*

$$\exists\ M_n(a) = \sup_{t\in[(n-1)a,na]}\{h(t)\}$$

$$\exists\ m_n(a) = \inf_{t\in[(n-1)a,na]}\{h(t)\}$$

es decir h es acotada superior e inferiormente en todo compacto.

(ii) $\forall a > 0$ *se satisface:*

$$\exists \sum_{n\geq 1} M_n(a) \quad \exists \sum_{n\geq 1} m_n(a)$$

(iii) *por último se tiene que:*

$$\lim_{a\searrow 0} a\left(\sum_{n\geq 1} M_n(a)\right) = \lim_{a\searrow 0} a\left(\sum_{n\geq 1} m_n(a)\right)$$

Ejercicio 18. Probar que si $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es positiva, decreciente y $\int\limits_0^\infty h(t)dt < \infty$ entonces h es directamnete Riemann integrable .

Observación. Necesariamente se tiene que:

$$\int_0^\infty h(t)dt = \lim_{a\searrow 0}\sum_{n\geq 1} aM_n(a) = \lim_{a\searrow 0}\sum_{n\geq 1} am_n(a)$$

Teorema 7 (Teorema Clave de la Renovación). *Si F es distribución en $\mathbb{R}_+$, no aritmética y $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es directamente Riemann integrable, entonces:*

$$\exists \lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt$$

Demostración. Consideremos:

$$h = \mathbb{1}_{[a,b]} \quad \text{para } 0 \leq a < b \quad \Rightarrow h(t-x) = \mathbb{1}_{[t-b,t-a]} \quad \text{luego:}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t h(t-x)dm(x) &= \int_0^t \mathbb{1}_{[t-b,t-a]}(x)dm(x) = \int_{t-b}^{t-a} dm(x)\\ &= m(t-a) - m(t-b) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{b-a}{\mu} = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \mathbb{1}_{[a,b]}\,dt. \quad (\text{ Blackwell })\end{aligned}$$

□

Ejercicio 19. Extender la demostración para h directamente Riemann integrable.

2.1. Ecuaciones Tipo Renovación (ETR)

Recordemos que si $H; G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones crecientes postivas y concentradas en $\mathbb{R}_+$ ($H(0^-) = G(0^-) = 0$), entonces se define la *convolución* de H y G como:

$$H * G\ (t) = \int_0^t H(t.x)dG(x)$$

se tiene, para G_1, G_2, G_3 como en la definición, que :

- $(G_1 * G_2) * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3)$ (Asociatividad)

- $G * H = H * G$ (conmutatividad)
- $G * H_0(t) = H_0(t) * G$ donde $H_0(t)$ es la función de Heaviside satifaciendo : $\frac{dH_0(t)}{dt} = \delta_0$ donde δ_0 es la delta de dirac.

Definición 22. *Sea $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible, la siguiente expresión es una ecuación tipo renovación:*

$$\left[\ A = a + F * A\ \right] \qquad \textbf{\textit{(ETR)}}$$

es decir:

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x) \quad \forall t \geq 0$$

Proposición 38. *Si a es medible y acotada en compactos entonces $\exists!$ $A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que es acotada en compactos y que verifica la :*

$$A = a + F * A \quad \textbf{\textit{(ETR)}}$$

esta única función está dada por:

$$A = a + m * A$$

es decir se tiene :

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dm(x) \quad \forall t \geq 0$$

Observación. En todo lo que sigue $m(t) = \sum\limits_{n\geq 1} F^{n*}(t)$

Demostración. Probemos que $A = a + m * a$ verifica **(ETR)** y es acotada en compactos :

$$\begin{aligned}
A =& a + m * a = a + \left(\sum_{n\geq 1} F^{n*}(t)\right) * a = a + (F * \left(\sum_{n\geq 0} F^{n*}(t)\right)) * a \\
=& a + F * (\left(\sum_{n\geq 0} F_n^*(t)\right) * a) = a + F * (a + \left(\sum_{n\geq 1} F^{n*}\right) * a) = a + F * (a * + m * a) \\
=& a + F * A \quad \text{luego A verifica } \textbf{(ETR)}
\end{aligned}$$

por otra parte:

$$\sup_{t\leq T} A(t) = \sup_{t\leq T}\left\{a(t) + \int_0^t a(t-x)dm(x)\right\} \leq \sup_{t\leq T} a(t) + \left(\sup_{t\leq T} a(t)\right) m(t) < \infty$$

luego A es acotada en compactos, nos resta PPar la unicidad, en efecto esto resulta de iterar **(ETR)**:

$$A = a + F * A = a + F * (a + F * A) = a + F * a + F_2^* * A = \cdots$$

$$= a + F * a + F^{2*} * a + \cdots + F^{n*} * a + F^{n*} * A = \left(\sum_{k=0}^{n-1} F^{k*}\right) * a + F^{n*} * A$$

$$\text{se tiene :} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} F^{k*}\right) * a \xrightarrow[n\to\infty]{} m * a$$

por otra parte se tiene:

$$|(A * F^{n*})(t)| \leq \int_0^t |A(t-x)| dF^{n*}(x) \leq \left(\sup_{x\in[0,t]} |A(x)|\right) \underbrace{\int_0^t dF^{n*}(x)}_{F^{n*}(t)}$$

como A es acotada en compactos, nos basta mostrar que $\forall t \geq 0$ se tiene que $F^{n*}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ya que con esto se demuestra que $A * F_n^*(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para ello observemos que para $t \geq 0$ fijo $\exists L \geq 1$ tal que $F_L^* < 1$ (esto se tiene por la continuidad por la derecha de F) . Sea $L = [\frac{t}{\alpha}] + 1$, con esto:

$$1 - F^{L*}(t) = \mathbb{P}\left\{\sum_{n=1}^{L} X_n \geq t\right\} \geq \mathbb{P}\left\{\sum_{n=1}^{L} X_n > L\alpha\right\} > (1 - F(\alpha))^L > 0$$

Ahora bien, para N fijo llamamos $c(N) = [\frac{N}{L}]$ y $r(N) = N - c(N)L$ se tiene:

$$F^{N*}(t) = \int_0^t F^{c(N)L*}(t-x) dF^{r(N)*}(x) \leq F^{c(N)L*}(t) F^{r(N)*}(t)$$

aplicando el mismo argumento se deduce que:

$$F^{SL*}(t) = \int_o^t F^{(S-1)L*}(t-x) dF^*(x) \leq F^{(S-1)L*}(t) F^{L*}(t)$$

luego:

$$F^{SL*}(t) \leq (F^{L*}(t))^S \quad \text{de donde se deduce que}$$

$$F^{N*}(t) \leq \left(\sup_{r=0,\ldots,L} F^{r*}(t)\right) (F^{L*}(t))^{c(N)}$$

del hecho que $F^{L*}(t) < 1$ y $c(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$ se concluye el resultado. $\square$

Observación. si $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva decreciente con $\int_0^\infty |a(t)| < \infty$, entonces es directamente Riemann integrable satisfaciendo $a(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

2.2. Cadenas de Ramificación

Sea Y una variable aleatoria tomando valores en $\mathbb{N}$, con una distribución dada por:

$$p_k = \mathbb{P}\{Y = k\} \quad k \in \mathbb{N}$$

Y modela el número de descendientes. Notaremos por $\varphi(s)$ a la función generatriz asociada , es decir:

$$\varphi(s) = \mathbb{E}(s^Y) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k \quad \text{para } |s| < 1$$

Recuerdo. W, W' son variables aleatorias independientes entonces:

$$\varphi_{W+W'}(s) = \mathbb{E}(s^{W+W'}) = \mathbb{E}(s^W s^{W'}) = \mathbb{E}(s^W)\mathbb{E}(s^{W'}) = \varphi_W(s)\varphi_{W'}(s)$$

Sea $(Y_{r,n})_{r\geq 1, n \geq 0}$ variables aleatorias iid con $Y_{r,n} \sim Y$ (es decir $\mathbb{P}\{y_{r,n} = k\} = p_k \quad \forall k \geq 0$), haremos la siguiente definición:

Definición 23. $(X_n)_{n\geq 0}$ *es una cadena de ramificación si:*

(i) $X_0 = i_0 \quad i_0 \geq 1$

(ii) $X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Y_{r,n-1}$ *si* $n \geq 1$

Donde X_n *corresponde al tamaño de la población en la etapa* n, *(observar que* $X_n = 0 \Rightarrow X_m = 0 \quad \forall m \geq n$*)* , p_k *es la PPabilidad que un individuo genere en la próxima etapa* k *individuos (es decir* $\vec{p}$ *es la distribución de descendientes de un individuo) e* $y_{r,n}$ *corresponde al número de descendientes del elemento n-ésimo en la generación n.*

Cada individuo tiene un "árbol"de descendientes independiente del resto, siendo este árbol el mismo en distribución para todos los individuos

Por la hipótesis que tenemos se tiene que $(X_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov a valores en $\mathbb{N}$ (Proceso de Ramificación discreto) con probabilidades de transición :

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{r=1}^{i} Y_{r,n} = j\right\} = \left(p^{*i}\right)_j$$

$$= \left(\underbrace{p * \ldots * p}_{i-veces}\right)_j \quad \text{con} \quad (p*q)_l = \sum_{r=0}^{l} p_{l-r} q_r$$

para p y q probabilidades en $\mathbb{N}$, observemos que 0 es absorbente, sea $\varphi_n(s) = \mathbb{E}(s^{X_n})$ luego:

$$\mathbb{E}(s^{X_n}) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\{X_n = j\} s^j = \sum_{j \geq 0}\left(\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} \mathbb{P}\{X_{n-1} = i\}\right) s^j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\left\{X_{n-1}=i\right\} \left(\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\left\{ \sum_{r=1}^{i} Y_{r,n-1} = j \right\} s^j \right) \\
&= \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\left\{X_{n-1}=i\right\} \left(\mathbb{E}\left(s^{\sum\limits_{r=1}^{i} Y_{r,n-1}} \right)\right) = \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\left\{X_{n-1}=i\right\} \mathbb{E}\left(\prod_{r=1}^{i} s^{Y_{r,n-1}} \right) \\
&= \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\left\{X_{n-1}=i\right\} (\varphi(s))^i = \varphi_{n-1}(\varphi(s))
\end{aligned}
$$

Luego se deduce que:

$$\varphi_n(s) = \varphi_{n-1}(\varphi(s)) \quad \forall \ |s| \leq 1 \quad \textbf{(crecimiento multiplicativo)}$$

supongamos que $X_0 = 1$ es la condición inicial, según esto se obtiene:

$$\varphi_0(s) = s, \ \ \varphi_1(s) = \varphi(s) \quad \text{y por iteración se tiene :}$$

$$\varphi_n(s) = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi(s)}_{n-veces} = \varphi^{(n)}(s) \quad \forall \quad |s| \leq 1$$

ahora calculemos $m_n = \mathbb{E}(X_n)$,antes recordemos que :

$$\varphi_W(s) = \sum_{n\geq 0} q_n s^n \quad \mathbb{E}(W) = \varphi'_W(s)$$

luego:

$$
\begin{aligned}
m_n =& \varphi'_n(s) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(s) = \left(\varphi^{(n-1)} \circ \varphi\right)'(s) = \varphi^{(n-1)'}\left(\varphi(s)\right)\varphi'(s) \\
=& \varphi'_{n-1}\left(\varphi(s)\right)\varphi'(s) \quad \text{ se tiene : } \ \ \varphi(s) = 1, \ \ \text{luego} \\
\varphi'_n(1) =& \varphi'_{n-1}\left(\varphi(1)\right)\varphi'(1) \quad \text{ y por iteración } \ \varphi'_n(1) = (\varphi'(1))^n
\end{aligned}
$$

notemos por $m = \varphi'(1)$ que representa al número de descendientes esperado, luego $\mathbb{E}(X_n) = m^n$. Para la varianza, notemos por $\sigma^2 = var(Y_{r,n})$ cabe hacer notar que:

$$
\begin{aligned}
\varphi''_n(1) =& \sum_{k\geq 2} k(k-1)\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = k\right\} s^{k-2} \\
=& \sum_{k\geq 2} k^2 \mathbb{P}\left\{X_{n+1} = k\right\} - \sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = k\right\} \\
=& \sum_{k\geq 1} k^2 \mathbb{P}\left\{X_{n+1} = k\right\} - \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}\left\{X_{n+1} = k\right\} \\
=& \mathbb{E}(^2_{X_{n+1}}) - m^{n+1}
\end{aligned}
$$

Y como

$$var(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2) - (\mathbb{E}(X_{n+1}))^2 = \varphi''_{n+1}(1) + m^{n+1} - m^{2(n+1)} \tag{2.3}$$

se tiene:

$$\varphi'_{n+1}(s) = \varphi'(\varphi_n(s))\varphi'_n(s) \quad \Rightarrow$$
$$\varphi''_{n+1}(s) = \varphi''(\varphi_n(s))(\varphi'_n(s))^2 + \varphi'(\varphi_n(s))\varphi''_n(s)$$

luego:

$$\begin{aligned}\varphi''_{n+1}(1) =& \varphi''(1)(\varphi'_n(1))^2 + \varphi'(1)\varphi''_n(1) = \varphi''(1)m^{2n} + m\varphi''_n(1)\\ =&(\sigma^2 + m^2 - m)m^{2n} + m\varphi''_n(1)\end{aligned}$$

con esta relación y (2.3) se prueba que :

$$var(X_{n+1}) = \begin{cases} \sigma^2 m^2 \frac{m^{n+1}-1}{m-1} & \text{si } m \neq 1 \\ (n+1)\sigma^2 & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

2.3. Probabilidades de Extinción

Notemos que si $p_0 = 0$ la probabilidad de extinción es 0. Si $p_0 = 1$ la extinción es inmediata en $n \geq 1$, luego supondremos que $0 < p_0 < 1$, la probabilidad de extinción en la generación n la notaremos por π:

$$\pi = \mathbb{P}_1 \{\exists n, X_n = 0\} = \mathbb{P}_1 \left\{ \bigcup_{n \geq 0} \{X_n = 0\} \right\} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_1 \{X_n = 0\}$$

$$\text{pues se tiene:} \quad \{X_{n-1} = 0\} \subseteq \{X_n = 0\}$$

se tiene lo siguiente:

$$\mathbb{P}_1 \{X_n = 0\} = \varphi_n(0) = \varphi^{(n)}(0) \quad \text{ por lo anterior}$$

$$\varphi_1(0) = p_0 \quad \varphi_n(0) = \varphi^{(n)}(0) \nearrow \pi.$$

hay dos casos que analizar :

$$p_0 + p_1 = 1, \quad \varphi(s) = p_0 + p_1 s \quad \text{es decir} \quad \pi = \lim_{n \to \infty} \varphi^{(n-1)}(p_0)$$

$$\text{en este caso} \quad \varphi^{(n-1)}(p_0) \nearrow 1 \quad \text{luego}\pi = 1$$

ahora el caso $p_0 + p_1 < 1$, observemos que siempre se tiene que:

$$\pi = \inf_{x \geq 0} \{\varphi(x) = x\}$$

vale decir, π es el menor de los puntos fijos de φ en $[0,1]$, en efecto es un punto fijo pues:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\varphi^{(n-1)}(0)) = \varphi(\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n-1)}(0))) = \varphi(\pi)$$

ya que φ es continua, y es el menor punto fijo en $[0,1]$ pues si $x \in [0,1]$ verifica $x = \varphi(x)$, del hecho que φ es una función creciente se tiene que :

$$0 \leq x \Rightarrow \varphi(0) \leq \varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(\varphi(0)) \leq \varphi(x) = x \Rightarrow \varphi^{(n)}(0) \leq x$$

$$\Rightarrow \pi \leq x \quad \text{luego es el menor}$$

queremos ver cuando el punto fijo es trivial o no, como estamos en el caso $p_0 + p_1 < 1$ se tiene que φ es estrictamente convexa en $[0,1]$ pues :

$$\varphi''(s) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0$$

observemos que $\varphi(1) = 1$ y $\varphi'(1) = m$, si $m \leq 1$ hay un único punto fijo, siendo este 1 . Concluímos que $\pi = 1$, en cambio si , $m > 1$ se tiene que:

$$0 < p_0 \leq \pi < 1$$

Después de este par de ejemplos, veremos un importante teorema:

Teorema 8. *Sea $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, directamente Riemann integrable, entonces si A es localmente acotada y verifica **(ETR)**:*

$$A = a + F * a \quad \textit{si } F \textit{ es no aritmética}$$

se cumple:

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(s)ds$$

Demostración. se tiene lo siguiente:

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-s)dm(s) \quad \text{se tiene } a(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

pues a es directamente Riemann integrable, F no aritmética y por Teorema Clave de la Renovación se satisface:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(t-s)dm(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(t)dt$$

□

2.4. Aplicaciones

Edad, Vida residual y Vida total asintóticas: Consideremos las siguientes notaciones:

$\gamma_t = t - S_{N(t)}$ **edad**

$\delta_t = S_{N(t)} - t$ **vida residual**

$\varepsilon_t = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = \gamma_t + \delta_t$ **vida total**

2.4.1. Vida residual asintótica

Supondremos que F es no aritmética . Notemos por $A(t) = \mathbb{P}\{\delta_t > x\} \quad \forall t \geq 0$ (es acotada), se tiene que:

$$A(t) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,\infty]}(\delta_t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,\infty]}|X_1)) = \int_o^\infty \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,\infty]}(\delta_t)|X_1 = s)dF(s)$$

Ahora bien :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,\infty]}(\delta_t)|X_1 = s) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t < s \leq t + x\textbf{(*)} \\ 1 & \text{si } s > t + x \end{array} \right\}$$

(*) pues $X_1 = S_{N(t)+1}$ (el proceso recomienza en $X_1 = s$)en este caso $\delta(t) = s - t \leq x$, luego se tiene que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,\infty]}(\delta_t)|X_1 = s) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \sim \\ A(t) & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ 1 & \text{si} s > t + x \end{array} \right\}$$

luego:

$$A(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,\infty]}(\delta_t)|X_1 = s)dF(s) = \int_0^t A(t-s)dF(s) + \int_{t+x}^\infty dF(s)$$

vale decir, la función acotada $A(t)$ verifica la **(ETR)** :

$$A = a + F * A \quad \text{con} \quad a(t) = \int_{t+x}^\infty dF(s) = (1 - F(t+x))$$

se satisface que : $a(t) \geq 0, \quad a(t) \searrow 0 \quad$ cuando $t \to \infty$, asumamos que:

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(t))dt \quad \text{en este caso se tiene :}$$

$$\int_0^\infty a(t)dt = \int_0^\infty (1 - F(t+x))dt = \int_x^\infty (1 - F(t))dt < \infty$$

por lo tanto en este caso se tiene que $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable obteniendo que:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\delta_t > x\} = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(t)dt = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1 - F(t))dt$$

Observemos que si $\mu < \infty$ entonces:

$$G(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(1 - F(t))dt$$

y esta corresponde a una función de distribución pues $G(\infty) = 1$, $G(x)$ es la distribución asintótica de la vida residual.

Proposición 39. *F no aritm ética, satisfaciendo $\mu < \infty$ entonces:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{S_{N(t)+1} - t \leq x\right\} = G(x) \quad \forall x \geq 0$$

2.4.2. Distribución asintótica de la edad

Edad: $\gamma_t = t - S_{N(t)}$, observemos que para $0 < x < t$ se tiene:

$$\{\gamma_t > x\} = \{\delta_{t-x} > x\} = \{\nexists\ n \ \mid \ S_n \in (t-x, t)\}$$

luego si F es no aritmética, con $\mu < \infty$ se tiene para $x > 0$ fijo :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\gamma_t > x\right\} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\delta_{t-x} > x\right\} = \frac{1}{\mu}\int_x^{\infty}(1 - F(t))dt = 1 - G(x)$$

por lo tanto :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\gamma_t \leq x\right\} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\delta_t \leq x\right\} = G(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^{x}(1 - F(t))dt$$

2.4.3. Distribución asintótica de la vida total

Vida total : $S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = \gamma_t + \delta_t$, consideremos un $x > 0$ fijo, notemos por:

$$A(t) = \mathbb{P}\left\{\gamma_t + \delta_t > x\right\} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\gamma_t+\delta_t>x\}})$$

se tiene que :

$$A(t) = \int_0^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\gamma_t+\delta_t>x\}}|X_1 = s)dF(s)$$

desarrollar cuanto vale esta esperanza condicional es un punto clave en teoría de renovación . Se tiene que :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\gamma_t+\delta_t>x\}}|X_1 = s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > \text{máx}(x,t) \\ A(t-s) & \text{si } s < t \\ 1 & \text{si} t \leq s \leq x \end{cases}$$

con esto se tiene:

$$A(t) = \int_0^t A(t-s)dF(s) + \int_{\text{máx}(x,t)}^{\infty} dF(s) = [1 - F(\text{máx}(x,t))] + \int_0^t A(t-s)dF(s)$$

esta es una **(ETR)**, con $a(t) = 1 - F(\text{máx}(x,t))$, asumamos que F es no aritmética, como $a(t) \searrow 0$ cuando $t \to \infty$, junto con $\mu < \infty$, y con el hecho que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty a(t)dt &= \int_0^\infty (1 - F(\text{máx}(x,t)))dt \\ &= \int_0^x (1 - F(t))dt + \int_x^\infty (1 - F(t))dt < \infty \quad \text{ pues } \mu < \infty\end{aligned}$$

se deduce, por teorema clave de la renovación que :

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(t)dt = \frac{1}{\mu}\big[x(1-F(x)) + \int_x^\infty (1 - F(t)dt)\big] = \int_x^\infty tdF(t)$$

lo último gracias a una integración por partes, luego si notamos:

$$H(x) = \int_0^\infty tdF(t), \quad \text{ para } x > 0$$

se tiene que H es una función de distribución en $\mathbb{R}_+$ y :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\gamma_t + \delta_t \leq x\right\} = H(x) \quad \forall x \geq 0$$

Observación.

$$\int_0^\infty tdH(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty t^2 dF(t)$$

luego la media de la distribución asintótica de la vida total :

$$\int_0^\infty tdH(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty t^2 dF(t) \underbrace{\geq}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \frac{1}{\mu}\left(\int_o^\infty tdF(t)\right)^2 = \mu$$

con la igualdad ssi F está concentrada en un punto, como estamos en el caso no aritmético :

$$\int_0^\infty tdH(t) > \int_0^\infty tdF(t)$$

2.5. Procesos de Renovación Retardados o Generalizados (Delayed)

Sean G y F distribuciones en $\mathbb{R}_+$ con F verificando $F(0^-) < 1$ y notando:

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(t))dt$$

consideremos $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias iid, satisfaciendo $X_1 \sim G$ y $X_n \sim F \quad \forall n \geq 2$, se define de manera similar:

$$S_0^D = 0 \quad S_n^D = \sum_{k=1}^n X_k$$

$$N^D(t) = \sup_{n\geq 0}\left\{S_n^D(t) \leq t\right\} \quad \textbf{Proceso de renovación generalizado}$$

$$m^D(t) = \mathbb{E}(N^D(t)) \quad \Rightarrow m^D(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_n^D \leq t\}})$$

luego se tiene que:

$$m^D(t) = \sum_{n\geq 0} G * F_n^*(t)$$

pues $S_n^D \sim G * F_{n-1}^* \quad \forall n \geq 1$, una fórmula que usaremos más adelante es la siguiente :

$$\mathcal{L}(m^D)(s) = \int_0^\infty e^{-st} m^D(t)dt \quad \forall s > 0 \quad \textbf{Transformada de Laplace}$$

como $\mathcal{L}(A * B)(s) = \mathcal{L}(A)(s)\mathcal{L}(B)(s)$ (teorema de convolución de la transformada) se deduce que:

$$\mathcal{L}(m^D)(s) = \frac{\mathcal{L}(G)(s)}{1 - \mathcal{L}(F)(s)}$$

en efecto:

$$\mathcal{L}(m^D)(s) = \mathcal{L}(\sum_{n\geq 0} G * F_n^*(t)) = \mathcal{L}(G)(s)\sum_{n\geq 0}(\mathcal{L}(F)(s))^n = \frac{\mathcal{L}(G)(s)}{1 - \mathcal{L}(F)(s)}$$

se puede mostrar a partir del teorema de los grandes números que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N^D(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

además se tiene que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m^D(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

Lema 6. *Para $0 < s \leq t$ se tiene que:*

$$\mathbb{P}\left\{S_n^D(t) \leq s\right\} = (1 - G(t)) + \int_0^s (1 - F(t-y))dm^D(y)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)} \leq s\right\} =& \sum_{n\geq 0}\int_0^\infty \mathbb{P}\left\{N^D(t) = n, S_n^D(t) \leq s\right\} \\
=& \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left\{S_{n+1}^D > t, S_n \leq s\right\} = \mathbb{P}\left\{S_1^D > t\right\} + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left\{S_{n+1}^D > t, S_n \leq s\right\} \\
=& (1 - G(t)) + \sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \mathbb{P}\left\{S_{n+1}^D > t, S_n^D \leq s | S_n^D = y\right\} d(G * F_{n-1}^*)(y)
\end{aligned}$$

Observación. $\mathbb{P}\left\{S_n^D \leq y\right\} = (G * F_{n-1}^*)(y)$ pues:

$$S_n^D = \underbrace{X_1}_{\sim G} + \underbrace{\cdots + X_n}_{\sim F}$$

$$\begin{aligned}
&=(1 - G(t)) + \sum_{n\geq 1} \int_0^s \mathbb{P}\left\{S_{n+1}^D > t | S_n^D = y\right\} d(G * F_{n-1}^*)(y) \\
&=(1 - G(t)) + \sum_{n\geq 1} \int_0^s (1 - F(t-y)) d(G * F_{n-1}^*)(y) \\
&=(1 - G(t)) + \int_0^s (1 - F(t-y)) d\left(\underbrace{\sum_{n\geq 1} G * F_{n-1}^*}_{m^D}\right)(y)
\end{aligned}$$

la última igualdad es porque :

$$\sum \int g dv_n = \int g d\left(\sum_n v_n\right) \quad \forall g \geq 0$$

y como $m^D = \sum\limits_{n\geq 1} F_{n-1}^*$ se deduce el resultado. □

2.6. Procesos de Renovación en Equilibrio

En este caso supondremos :

$$\mu = \int_0^\infty t dF(t) = \int_0^\infty (1 - F(t)) dt < \infty$$

Sea F distribución en $\mathbb{R}_+$, con $F(0) < 1$, definamos :

$$F_{eq}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(t)) dt$$

que será la distribución asintótica de la vida residual del proceso de renovación definido por F . El **Proceso de Renovación en Equilibrio** definido por F es un proceso generalizado con :

$$X_1 \sim G = F_{eq} \quad X_n \sim F \quad \forall n \geq 2$$

con $(X_n)_{n\geq 1}$ independientes, consideremos la transformada de laplace de F_{eq} :

$$\mathcal{L}(F_{eq})(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_{eq}(t) \quad s > 0$$

Lema 7. *Se tiene la siguiente igualdad :*

$$\mathcal{L}(F_{eq})(s) = \frac{1 - \mathcal{L}(F)(s)}{\mu s}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(F_{eq})(s) = & \int_0^\infty e^{-st} dF_{eq}(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-st}(1-F(t))dt \\
= & \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^\infty \left(e^{-st}\,\mathbb{1}_{\{y\geq t\}}\,dF(y)\right)dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left(\int_0^y e^{-st}dt\right)dF(y) \\
= & \frac{1}{\mu s}\int_0^\infty (1-e^{-sy})dF(y) = \frac{1-\mathcal{L}(F)(s)}{\mu s}
\end{aligned}$$

□

Proposición 40. *En este proceso de equilibrio se tiene que :*

(i) $m^D(t) = \frac{t}{\mu} \quad \forall t \geq 0$

(ii) $\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t \leq x\right\} = F_{eq}(x)$

(iii) $\left\{N^D(t)\right\}_{:t\geq 0}$ *es a incrementos estacionarios , vale decir :*

$$(N^D(t+s_0) + N^D(s_0)) \sim N^D(t)) \qquad \textit{para } s_0 \textit{ fijo.}$$

Demostración. **(i)**

$$\mathcal{L}(m^D)(s) = \frac{\mathcal{L}(F_{eq})(s)}{1-\mathcal{L}(F)(s)} = \frac{1-\mathcal{L}(F)(s)}{(1-\mathcal{L}(F)(s))\mu s} = \frac{1}{\mu s}$$

y como:

$$\int_0^\infty \frac{t}{\mu}e^{-st}dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{\mu s}$$

con esto y gracias a la unicidad de la transformada de laplace se deduce que : $m^D(t) = \frac{t}{\mu}$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x\right\} = & \mathbb{E}(\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x \;\mid\; S_{N^D(t)=0}\right\}) \\
= & \mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x \;\mid\; N^D(t) = 0\right\}\mathbb{P}\left\{N^D(t) = 0\right\} \\
& + \int_{0^+}^t \mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x \;\mid\; S_{N^D(t)} = y\right\} d\mathbb{P}(S_{N^D(t)} \leq y)
\end{aligned}$$

pues $\quad S_{N^D(t)} = 0 \Leftrightarrow N^D(t) = 0$

ahora bien :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x \;\mid\; N^D(t) = 0\right\} =& \frac{\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x, N^D(t) = 0\right\}}{\mathbb{P}\left\{N^D(t) = 0\right\}} \\ =& \frac{\mathbb{P}\left\{\text{no hay renovaciones en } [0, t+x]\right\}}{\mathbb{P}\left\{\text{ no hay renovaciones en } [0,t]\right\}} \\ =& \frac{(1 - F_{eq}(t+x))}{1 - F_{eq}(t)}\end{aligned}$$

luego:

$$\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x \;\mid\; N^D(t) = 0\right\}\mathbb{P}\left\{N^D(t) = 0\right\} = (1 - F_{eq}(t+x))$$

ahora

$$\int_{0^+}^{t} \mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1}) - t > x \;\mid\; S_{N^D(t)} = y\right\} d\mathbb{P}(S_{N^D(t)} \leq y) = (\text{por } \textbf{lema 2.61})$$

$$\int_{0^+}^{t} \mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1}) - t > x \;\mid\; S_{N^D(t)} = y\right\}(1 - F(t-y))dm^D(y) \quad \text{por la parte } \textbf{(i)}$$

para $y > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t > x \;\mid\; S_{N^D(t)} = y\right\} =& \frac{\mathbb{P}\left\{\text{no hay renovaciones en } [y, t+x]\right\}}{\mathbb{P}\left\{\text{ no hay renovaciones en } [y,t]\right\}} \\ =& \frac{(1 - F(t+x-y))}{1 - F(t-y)}\end{aligned}$$

luego queda :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} > x\right\} =& (1 - F_{eq}(t+x)) + \int_{0^+}^{t} (1 - F(t+x-y))\frac{dy}{\mu} \\ =& (1 - F_{eq}(t+x)) + \underbrace{\int_{x}^{x+t} (1 - F(z))\frac{dz}{\mu}}_{F_{eq}(t+x) - F_{eq}(x)} = 1 - F_{eq}(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left\{S_{N^D(t)+1} - t \leq x\right\} = F_{eq}(x)$$

(iii) $(N^D(t+s_0) - N^D(s_0))_{t\geq 0}$ es un proceso de renovación generalizado con distribución inicial :

$$G(x) = \mathbb{P}\left\{S_{N^D(s_0)+1} - s_0 \leq x\right\} = F_{eq}(x) \quad (\text{ie } X_1 \sim G(x) \;\; X_n \sim F \quad n \geq 2)$$

luego tiene la misma distribución que el proceso de renovación en equilibrio $(N^D(t))_{t\geq 0}$ □

2.7. Proceso de Poisson

Este proceso se puede definir como proceso puntual, sin embargo lo introduciremos aquí en el contexto de teoría de renovación .

Definición 24. *: Sean* $(X_n)_{n\geq 1}$ *variables aleatorias iid con* $X_n \sim exp[\lambda] \quad \lambda > 0$*, consideremos* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$*, entonces el proceso de renovación* $(N(t))_{t\geq 0}$ *siendo :*

$$N(t) = \sup_n \{s_n \leq t\}$$

se le llama ***Proceso de Poisson****.*

Proposición 41. *El proceso de Poisson* $(N(t))_{t\geq 0}$ *es un proceso de renovación en equilibrio, es decir:*

$$F_{eq} = F \quad \textit{para} \quad F \sim exp[\lambda]$$

Demostración.

$$F_{eq} = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1 - F(y))dy = \lambda \int_0^x e^{-\lambda y} dy = (1 - e^{-\lambda x}) = F(x) \quad (\mu = \frac{1}{\lambda})$$

□

Ejercicio 20. Probar que : $F = F_{eq} \Rightarrow F \sim exp[\lambda]$, para algún $\lambda > 0$

Proposición 42. *El proceso de Poisson* $(N(t))_{t\geq 0}$ *de tasa* $\lambda > 0$*, verifica :*

$$\mathbb{P}\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

es decir, $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

Demostración. Se tiene $\mathbb{P}\{N(t) \geq n\} = \mathbb{P}\{S_n \leq t\}$, Probemos entonces que la densidad f_{S_n} de S_n verifica :

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall n \geq 1 \tag{2.4}$$

Probaremos que se tiene esta última fórmula por inducción, para $n = 1$ se tiene pues queda:

$$f_{S_1}(t) = f_{X_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

supongamos que se cumple hasta n, luego Probemos que tanbién se tiene para $n+1$:

$$f_{S_{n+1}}(t)=\int_0^t f_{X_{n+1}}(t-x)f_{S_n}(x)dx$$

lo anterior se tiene porque :

$$S_{n+1}=S_n+X_{n+1} \text{ con } S_n \text{ independiente de } X_{n+1} \Rightarrow f_{S_{n+1}}=f_{X_{n+1}}*f_{S_n}$$

luego volviendo a la inducción tenemos:

$$=\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-x)}\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}dx=e^{-\lambda t}\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}dx=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

usando la hipótesis de inducción, con lo cual se prueba (2.4) . Luego :

$$\mathbb{P}\left\{N(t)\geq n\right\}=\mathbb{P}\left\{S_n\leq t\right\}=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

integrando por partes se obtiene :

$$=e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\bigg|_0^t+\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}dx=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda x)^n}{n!}+\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}dx$$

por iteración, y como $\frac{(\lambda x)^n}{n!}$ converge uniformemente a 0 en $[0,t]$ se deduce que :

$$\mathbb{P}\left\{N(t)\geq n\right\}=e^{-\lambda t}\left(\sum_{k\geq n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

lo que verifica que :

$$\mathbb{P}\left\{N(t)=n\right\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

□

Proposición 43. $(N(t+s)-N(t))$ *es independiente de* $N(t)\quad \forall s>0,t\geq 0$.

Demostración. Se tiene que :

$$\mathbb{P}\left\{N(t+s)-N(t)\geq k,N(t)=l\right\}=\mathbb{P}\left\{S_{k+l}\leq t+s,S_{l+1}>t,S_l\leq t\right\}$$

Sea $l=0, K=1$, luego:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N(t+s)-N(t)\geq 1, N(t)=0\} &= \mathbb{P}\{X_1 \leq t+s, X_1>t\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1>t\} - \mathbb{P}\{X_1>t+s, X_1>t\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1>t\}(1-\frac{\mathbb{P}\{X_1>t+s\}}{\mathbb{P}\{X_1>t\}}) \\
&= \mathbb{P}\{X_1>t\}(1-\mathbb{P}\{X_1>s\}) = \mathbb{P}\{X_1>t\}\mathbb{P}\{X_1\leq s\} \\
&= \mathbb{P}\{N(t)=0\}\mathbb{P}\{N(t+s)-N(t)\geq 1\}
\end{aligned}$$

Ésto último pues $N(t+s)-N(t) \sim N(s)$ $\square$

Se puede probar que le proceso de Poisson verifica lo sigueinte : para $(a,b]$ notemos :

$$N((a,b]) = N(b) - N(a)$$

que es el número de renovaciones en $(a.b]$, entonces se tiene que:

$$\{N((a_i,b_i])\}_{i=1,\ldots,n}$$

son independientes si los intervalos correspondientes son disjuntos (antes habiamos enunciado que $N((0,t])$ era independiente de $N((t,t+s])$), esta propiedad se enuncia diciendo que el proceso de Poisson es un proceso a **incrementos independientes** . Saquemos alguna conclusiones de esto:

2.7.1. Apartado .

Estadísticos de Orden : Consideremos las variables aleatorias reales $Y_1,\ldots,Y_n$, a partir de las cuales se definen las variables aleatorias $Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)}$ por:

$$Y_{(1)} = \min\{Y_i = i : 1,\ldots,n\}$$

$$Y_{(j)} = \min\left(\{Y_i = i : 1,\ldots,n\} \setminus \left\{Y_{(1)},\ldots,Y_{(j-1)}\right\}\right)$$

que llamaremos " muestra ordenada " . Supongamos que $Y_1,\ldots,Y_n$ son independientes, e idénticamentes distribuidas (idd), con función de densidad f_Y, vale decir :

$$\frac{d\mathbb{P}\{Y_j \leq y\}}{dy} = f_Y(y)$$

entonces $(Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)})$ es un vector aleatorio con función de densidad $f_{Y_{(1)}\ldots Y_{(n)}}(y_1,\ldots,y_n)$ que verifica :

$$f_{Y_{(1)}\ldots Y_{(n)}}(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} n!\prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i) & \text{si } y_1 < \ldots < y_n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

en efecto, supongamos que $y_1 < \ldots < y_n$ tomando para cada $i = 1, \ldots, n$ h_i estrictamente positivo y suficientemente pequeño de manera que :

$$y_i + \frac{h_i}{2} < y_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{2} \quad \text{y además satisfaciendo:}$$

$$\mathbb{P}\left\{Y_{(i)} \in (y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}], \quad i = 1, \ldots, n\right\}$$

$$= \mathbb{P}\left\{\exists\ \pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},\ \text{permutación tal que}\quad Y_{\pi(i)} \in\right\} (y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}) \quad i = 1, \ldots, n$$

$$= \sum_{\substack{\pi:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\} \\ \text{permutación}}} \mathbb{P}\left\{Y_{\pi(i)} \in y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} \quad i = 1, \ldots, n\right\}$$

$$= n!\mathbb{P}\left\{Y_i \in (y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}) \quad i = 1, \ldots, n\right\}$$

pues todas las permutaciones tiene la misma distribución

$$= n! \prod_{i=1}^{n} \left(F_{Y_i}(y_i + \frac{h_i}{2}) - F_{Y_i}(y_i - \frac{h_i}{2})\right)$$

tomando:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}} h_i \mathbb{P}\{\}$$

resulta :

$$f_{Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i) \quad \text{si } y_1 < \ldots < y_n$$

Ejemplo 9. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias i.i.d. con $Y_i \sim \text{Uniforme}[0, t]$, vale decir :

$$f_Y(y) = \frac{1}{t}\, \mathbb{1}_{[0,t]}(y), \quad \Rightarrow f_{Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}\, \mathbb{1}_{\{0<y_1<\ldots y_n<t\}}$$

Proposición 44. *Sea $(N(t))_{t\geq 0}$ proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ (es decir un proceso de renovación con tiempo entre renovaciones $exp[\lambda]$), entonces la distribución condicional :*

$$\{(S_1, \ldots, S_n) \ \mid\ N(t) = n\}$$

la cual se lee, $(S_1, \ldots, S_n)$ condicionado a $N(t) = n$ (para $n \geq 1$) , es la distribución ordenada de n uniformes en $[0, t]$, es decir :

$$\{(S_1, \ldots, S_n) \ \mid\ N(t) = n\} \quad \textit{tiene densidad dada por:}$$

$$f_{\{(S_1,\ldots,S_n)\ \mid\ N(t)=n\}}(y_1 \ldots y_n) = \frac{n!}{t^n}\, \mathbb{1}_{\{0<y_1<\ldots y_n<t\}}$$

con $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, son los instantes entre llegadas .

Demostración. Sea $0 < y_1 < \dots y_n < t$, escogemos $h_i > 0$ tal que :

$$y_i + \frac{h_i}{2} < y_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{2}, \text{y en los extremos :}$$

$$y_1 - \frac{h_1}{2} > 0; \quad y_n + \frac{h_n}{2} < t$$

se tiene lo siguiente:

$$\mathbb{P}\left\{S_i \in (y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}),\ i = 1, \dots, n;\ N(t) = n\right\}$$

$$= \mathbb{P}\left\{\nexists \text{ renovaciones en } (0, y_1 - \frac{h_1}{2}) \cup (y_n + \frac{h_n}{2} + 1) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (y_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{2})\right\}$$

$$\cup \left\{\ \exists!\ 1 \text{ renovación en cada uno de los intervalos } (y_i + \frac{h_i}{2}, y_i - \frac{h_i}{2}]\ i = 1, \dots, n\right\}$$

gracias a la propiedad de incrementos independientes del proceso de Poisson, se obtiene que la última expresión es

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{N((y_i + \frac{h_i}{2}, y_i - \frac{h_i}{2}]) = 1\right\} \mathbb{P}\left\{N(0, y_1 - \frac{h_1}{2}) = 0\right\} \mathbb{P}\left\{N(y_n + \frac{h_n}{2}, 1) = 0\right\} \cdot$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{N(y_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{2}) = 0\right\}$$

$$\text{como} \quad \mathbb{P}\left\{N(h) = 1\right\} = \lambda h e^{-\lambda h}, \quad \mathbb{P}\left\{N(h) = 0\right\} = e^{-\lambda h}$$

lo anterior se escribe

$$= \lambda^n \left(\prod_{i=1}^{n} h_i\right) e^{-\lambda t}$$

luego

$$\mathbb{P}\left\{S_i \in (y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}),\ i = 1, \dots, n;\ N(t) = n\right\} = \frac{\lambda^n \left(\prod_{i=1}^{n} h_i\right) e^{-\lambda t}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^{n} h_i$$

entonces si $0 < y_1 < \dots < y_n < t$, implica que :

$$f_{\{(S_1 \dots S_n)\ |\ N(t)=n\}}(y_1 \dots y_n) = \lim_{\left(\max_i |h_i| \to 0\right)} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} h_i} \mathbb{P}\left\{S_i \in (y_i - \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}), i = 1, \dots, n;\ N(t) = n\right\}$$

$$= \frac{n!}{t^n}$$

$\square$

Proposición 45. *El proceso de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$, de tasa $\lambda > 0$, es el único proceso verificando las siguientes propiedades :*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \quad \forall\, t \geq 0$

(ii) $N(0) = 0$

(iii) $N(s) \leq N(t) \quad si \quad 0 \leq s \leq t$

(iv) $(N(t))_{t\geq 0}$ *es a incrementos independientes y estacionarios, es decir*

$$\{N(b_i) - N(a_i),\, i = 1, \ldots, n\}$$

son variables aleatorias si $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n$ *(incrementos independientes) y:*

$$N(b) - N(a) \sim N(b+h) - N(a+h) \quad \forall\ 0 \leq a \leq h \quad h \geq 0$$

(incremento estacionarios)

(v) $\mathbb{P}\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h) \quad$ *donde* $\quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0,\ \mathbb{P}\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

Observación. • $\mathbb{P}\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h)$

• **(i)(ii)(iii)** en conjunto se llama proceso de conteo

Demostración. lo que Probaremos es que :

$$\mathbb{P}\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

esto demostrará que la marginal de $(N(t) : t \geq 0)$ es de Poisson . Definamos, $p_n(t) = \mathbb{P}\{N(t) = n\}$ recordemos que $N(0) = 0$. Sea $h > 0$, se tiene que :

$$p_n(t+h) = \mathbb{P}\{N(t+h) = n\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{N(t+h) = n \ \mid \ N(t) = k\}\, \mathbb{P}\{N(t) = k\}$$

pues $N(t)$ crece con t, y por la propiedad **(v)** :

$$= (1 - \lambda h - o(h))p_n(t) + (\lambda h + o(h))p_{n-1}(t) + o(h)$$

con $p_{-1}(t) = 0$, con lo que la fórmula vale para $n = 0$, luego :

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

haciendo $h \searrow 0^+$ (y con el mismo argumento se puede hacer para $h \nearrow 0^-$, obviamente excepto en $t = 0$), se obtiene :

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad (\forall t \geq 0)(\forall n \geq 0)$$

con la condición de borde $p_n(0) = \delta_{n0}$, calculemos para $n = 0$ se tiene que :

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \quad , p_0(0) = 1 \quad \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

finalicemos por inducción, supongamos que hemos probado :

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (\forall k \leq n)$$

luego reemplazando se tiene que :

$$\begin{aligned} p_{n+1}'(t) + \lambda p_{n+1}(t) =& \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ \Rightarrow \left(e^{\lambda t}p_{n+1}(t)\right)' =& \lambda\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{con } p_{n+1}(0) = 0 \\ \Rightarrow e^{\lambda t}p_{n+1}(t) =& \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

que prueba la inducción, entonces la distribución finito dimensional queda para, $t_1 < \ldots < t_k$, $n_1 \leq \ldots \leq n_k$:

$$\mathbb{P}\left\{N(t_1) = n_1, \ldots, N(t_k) = n_k\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{k} N(t_i - t_{i-1}) = n_i - n_{i-1}\right\}$$

pues $n_0 = t_0 = 0$, y usando la propiedad **(iv)** (incrementos independientes)

$$= \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left\{N(t_i - t_{i-1}) = n_i - n_{i-1}\right\} = e^{-\lambda t_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{n_i - n_{i-1}}}{(n_i - n_{i-1})!}$$

y esto **coincide** con la distribución finito dimensional de un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$. por Teorma de consistencia de Kolmogorov se obtiene el resultado. $\square$

3. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Seguiremos considerando I un conjunto numerable, dotado de la ς-álgebra discreta $\mathcal{P}(I)$. Introduciremos primero la noción de semigrupo (sub)markoviano que luego será asociado a las cadenas de markov a tiempo continuo.

Definición 25 (Semigrupo (sub)markoviano). $P = \{P(t)\}_{t \geq 0}$ *se denominará semigrupo submarkoviano si cumple:*

a) $\forall\ t \geq 0 \quad P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$ *es matriz subestocástica, es decir:*
$P_{ij}(t) \geq 0 \ \ \forall i,j \ \in I \qquad \sum_{j \in I} p_{ij}(t) \leq 1.$

b) $P(t+s) = P(t)P(s) \ \ \forall s,t \geq 0 \quad P(0) = \mathbb{I}$ *(semigrupo)*

Observación: $\mathbb{I}$ denota la matriz identidad. Si la matriz P(t) es estocástica i.e. $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$ P se denomina semigrupo markoviano. Además de las propiedades anteriores consideraremos que los semigrupos (sub)markovianos cumplen la siguiente hipótesis que denominaremos hipótesis standard 1 *(HS1)*:

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} p_{ii}(t) = 1 \quad \forall i \in I \quad \textit{(HS1)}$$

Observación: La *(HS1)* también puede escribirse:

$$\forall i,j \in I \quad \lim_{t \longrightarrow 0^+} = \delta_{ij} \ \ \textit{i.e. } P(t) \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} P(0).$$

Demostración. De la propiedad *a)* (submarkov.) tenemos:

$$1 \ - \ P_{ii}(t) \geq \sum k \neq i p_{ij}(t) \geq p_{ij}(t).$$

Luego tomamos $\lim_{t \longrightarrow 0^+}$ y concluimos. ☐

La *(HS1)* es la continuidad de $P_{ii}(t)$ en t=0, pero veamos que junto a *a)* y *b)* implica propiedades más fuertes: primero la continuidad uniforme de $P_{ij}(t)$ en t y en j.

Proposición 46. $|p_{ij}(t \pm h) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(h) \quad \forall t \geq 0,\ \forall h > 0$ *tq.* $t \pm h \geq 0$.

Demostración. Consideremos $h > 0$, se tiene de la propiedad de semigrupo:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in I} p_{ik}(h) p_{kj}(t) = p_{ii}(h) p_{ij}(t) \ + \ \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t).$$

$$\Rightarrow P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = (p_{ii}(h) \ - \ 1) p_{ij}(t) \ + \ \sum k \neq i p_{ik}(h) p_{kj}(t).$$

P submarkoviano $\Rightarrow \quad |P_{ij}(t+h) \ - \ P_{ij}(t)| \leq \text{máx}(|P_{ii}(h) \ - \ 1|, \sum k \neq i P_{ik}(h)) \leq |P_{ii}(h) \ - \ 1|$. Con lo que concluimos pues *(HS1)* $\Rightarrow \quad P_{ii}(h) \underset{h \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1$ y el límite es independiente de t y de h. ☐

Proposición 47. $\forall i \in I, \forall t \geq 0 \quad p_{ii}(t) > 0.$

Demostración. De la *(HS1)* $\exists \delta_i > 0$ *tq.* $p_{ii}(t) > 0$ $\forall t \in [0, \delta_i]$. Luego sea $t > 0$, $\exists n \geq 0$ *tq.* $\frac{t}{n} \geq \delta_i$, entonces $p_{ii}(\frac{t}{n}) > 0$, y además:

$$p_{ii}(\frac{t}{n}) > 0 \ \Rightarrow p_{ii}(t) > (p_{ii}(\frac{t}{n}))^n > 0.$$

pues $p_{ii}(t) \geq p_{ii}(\frac{t}{n})p_{ii}(t\frac{n-1}{n}) \ldots p_{ii}(\frac{t}{n})^n > 0.$ □

Ahora nos encaminamos a probar que *(HS1), a) y b)* implican la diferenciabilidad de P_{ij} en t=0, comenzamos con el sugiente:

Teorema 9.

$$\forall i \in I \quad \exists\ p'_{ii}(0) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) \ - \ 1}{h} \quad \in [-\infty, 0].$$

Demostración. Consideremos $i \in I$ fijo. De la proposición anterior $p_{ii}(t) > 0$ $\forall t \geq 0$, y de la propiedad de semigrupo : $p_{ii}(t+s) \geq p_{ii}(t)p_{ji}(s) \quad \forall t, s \geq 0$. Sea $\varphi(t) = -logp_{ii}(t)$. $\varphi(t) \in \mathbb{R}_+$ $\forall t \geq 0$ y además cumple $\varphi(t+s) \leq \varphi(t)\varphi(s)$. Luego del *lema de subaditividad* se tiene:

$$\exists \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \ \in [0, \infty].$$

$$\Rightarrow \ \exists q_i = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(t) \ - \ \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

$$\Rightarrow \ \exists \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{-logp_{ii}(t)}{t} \ \Rightarrow \ \frac{log(1 \ - \ (1 \ - \ p_{ii}(t))}{1 \ - \ p_{ii}(t)} \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

$\Rightarrow \frac{\frac{-logp_{ii}(t)}{t}}{\frac{1 \ - \ p_{ii}(t)}{t}} \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1 \ \Rightarrow \ \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1 \ - \ p_{ii}(t)}{t} = q_i \ \in [0, +\infty].$ □

Lema 8 (de Subaditividad). *Si* $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *cumple:*

a) $\varphi(t+s) \leq \varphi(t)\varphi(s)$ *(sub-aditividad)*

b) $\varphi(0) = \lim_{t \searrow 0^+} \varphi(t) = 0.$

Entonces existe el límite: $\lim_{t \searrow 0^-} \frac{\varphi(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \quad \in [0, \infty].$

Demostración. Sea $q = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t}$, luego basta probar : $\liminf_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{t} \geq q$

Consideremos $q < \infty$ luego dado $\varepsilon > 0$ $\exists t_\varepsilon > 0$ tq. $\frac{\varphi(t_\varepsilon)}{t_\varepsilon} \geq q - \varepsilon$.

Sea $t > 0, t < t_\varepsilon$, tal que t_ε se escribe $t_\varepsilon = nt + \delta$ con $0 \leq \delta < t \;\; n \in N$
De la sub-aditividad:

$$\varphi(t_\varepsilon) \leq \varphi(nt) + \varphi(\delta) \leq \ldots \leq n\varphi(t) + \varphi(\delta).$$

$$\Rightarrow \;\; q - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_\varepsilon)}{t_\varepsilon} \leq \frac{n\varphi(t)}{nt+\delta} + \frac{\varphi(\delta)}{t_\varepsilon} \leq \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta)}{t_\varepsilon}.$$

como $0 \leq \delta < t$ si $t \longrightarrow 0^- \;\Rightarrow \delta \longrightarrow 0^+ \;\Rightarrow \varphi(\delta) \longrightarrow 0$. Tenemos entonces de la desigualdad anterior:

$$q - \varepsilon \leq \liminf_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Como ε es arbitrario, concluimos. El caso $q = \infty$ es análogo. $\square$

Definición 26 (Estado estable). *$i \in I$ se dice* estable *si $q_i < \infty$. El semigrupo $P = (P(t))_{t>0}$ se dice* estable *si i es estable $\forall i \in I$.*

Observación. Podemos clasificar los estados según el valor de q_i.

- $P'_{ii}(0) = 0 \Leftrightarrow q_i = 0 \Leftrightarrow \;\forall t \geq 0 p_{ii}(t) = 1 \Leftrightarrow i$ es absorbente.
- $P'_{ii}(0) > -\infty \Leftrightarrow q_i < \infty \Rightarrow i$ estable.

Teorema 10. *Sea $P = (P(t))_{t>0}$ semigrupo markoviano standard, se tiene :*

$$\forall \; i \neq j \in I \quad \exists P'_{ij}(0) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \in [0, +\infty).$$

Demostración. Utilizaremos para la demostración propiedades de las cadenas de markov a tiempo discreto, por lo que debemos construir una a partir del semigrupo: Sean $i \neq j$, como antes tenemos: $q_{ij} = \liminf_{h \searrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}$ y basta mostrar $\limsup h \searrow 0 \frac{P_{ij}(h)}{h} \leq q_{ij}$. Sea $\varepsilon > 0$, de la hipótesis standard $\Rightarrow \;\; \exists h_0 > 0$ para el cual:

$$\inf_{h \in [0,h_0]} (1 - P_{ii}(h)) < \varepsilon \qquad \inf_{h \in [0,h_0]} P_{ji} < \varepsilon$$

$$\inf_{h \in [0,h_0]} (1 - P_{jj}(h)) < \varepsilon \qquad \inf_{h \in [0,h_0]} P_{ij} < \varepsilon$$

Para $h > 0$ la matriz $P(h) = (P_{kl}(h))_{k,l \in I}$ es estocástica, y de la propiedad de semigrupo se tiene $P(h)^n = P(nh)$. Consideramos entonces $(X_{nh})_{n \geq 0}$ la cadena de markov que tiene por matriz de transición a $P(h)$, es decir:

$$P_k\{X_{nh} = l\} = P_{kl}(nh) = P^n_{kl}(h)$$

Definición 27 (Probabilidad Taboo).

$${}_jP^{(n)}_{ik}(h) = \mathbb{P}\{X_{nh} = k, X_{rh} \neq j \;\forall r \in \{1, \ldots n-1\}\}$$

es la probabilidad de que la cadena partiendo del estado i llegue al k sin pasar por el estado "taboo" j (${}_jP_{ii}(0) = 1$).

Notemos ${}_jP_{ij}^{(n)}(h) = f_{ij}^{(n)}(h) = \mathbb{P}\{X_{nh} = j, X_{rh} \neq j \ \forall r \in \{1, \dots n-1\}\}$, tenemos entonces:

$$P_{ij}(nh) \geq \sum_{r=0}^{n-1} {}_jP_{ii}^{(r)}(h) P_{ij}(h) P_{jj}^{(n-r-1)}(h) \tag{3.1}$$

pues cada término en el lado derecho representa una forma de ir de i a j, y los eventos son excluyentes. Tenemos además:

$$P_{ii}(nh) = {}_jP_{ii}^{(n)}(h) + \sum_{r=1}^{n-1} f_{ij}^{(r)}(h) P_{ji}((n-r)h) \tag{3.2}$$

de lo último : ${}_jP_{ii}^{(n)}(h) \geq P_{ii}(nh) = \max_{r=1,\dots n-1} P_{ji}^{((n-r)h)}$. Para $n \geq 1$ sea $0 < h < h_0$ tq. $nh < h_0$, entonces de la elección de h_0 ${}_jP_{ii}^{(n)}(h) \geq 1 - 2\varepsilon$, y en (3.1):

$$\begin{aligned} P_{ij}(nh) &\geq (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon) n P_{ij}(h) \\ \frac{P_{ij}^{(nh)}}{nh} &\geq (1-3\varepsilon) \frac{P_{ij}(h)}{h} \end{aligned}$$

Sea ahora $K = \sup_{\frac{h_0}{2} \leq \overline{h} \leq h_0} \left\{ \frac{P_{ij}\overline{h}}{\overline{h}} \ \leq \frac{2}{h_0} \right\}$. finalmente para $h < \frac{h_0}{3}$ tomamos n tq. $nh \in [\frac{h_0}{2}, h_0]$

$$\Rightarrow \frac{P_{ij}(h)}{h} \leq \frac{K}{1-3\varepsilon} < \infty \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow \limsup_{h \searrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} \ \Rightarrow q_{ij} < \infty$$

$$q_{ij} = \liminf h \searrow 0 \frac{P_{ij}(h)}{h} \Rightarrow \exists\ h_1 \in (0, \frac{h_0}{2}) \text{tq.} \frac{P_{ij}(h_1)}{h_1} < q_{ij} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \exists\ \nu \in (0, \frac{h}{3}) \text{tq. } \frac{P_{ij}(\overline{h})}{\overline{h}} < q_{ij} + \varepsilon \ \forall \overline{h} \in (h_1 - \nu, h_1 + \nu)$$

$$\Rightarrow \forall\ h < \frac{\nu}{3} \ \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq. } nh \in [h_1 - \varepsilon, h_1 + \varepsilon].$$

Concluimos de (3.3) : $\frac{P_{ij}(h)}{(h)} \leq \frac{q_{ij}+\varepsilon}{1-3\varepsilon}$ lo anterior es $\forall \varepsilon > 0$ y luego $\limsup \frac{P_{ij}(h)}{h} \leq q_{ij}$. □

El teorema anterior nos garantiza que bajo la hipótesis estándar existen los coeficientes $q_{ij} = P'_{ij}(0) \ \ i, j \in I$. Si $i \neq j$ $q_{ij} \in [0, \infty)$ y $q_{ii} = -q_i \ \in [-\infty, 0]$.

Proposición 48. $\forall i \in I \ \sum_{j\in I} q_{ij} \leq 0$

Demostración. Si i es inestable $q_i = \infty$ y la propiedad se tiene. Supongamos ahora i estable, de la propiedad de sub-markov:

$$\sum_{j\in I} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} \leq 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} + \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} + \liminf_{t\longrightarrow 0} \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leq 0$$

del lema de Fatou $q_{ii} + \sum_{j\neq i} \liminf_{t\longrightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \sum_{j\in I} q_{ij} \leq 0.$ □

Definición 28 (Estado Conservativo). *$i \in I$ se dirá conservativo si i es estable($q_{ii} > -\infty$) y $q_{ii} = \sum_{j\in I} q_{ij} = 0$ ($\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i$) El semigrupo markoviano $(P(t))_{t\geq 0}$ se dirá conservativo si i es conservativo $\forall i \in I$.*

Observemos que si $|I| \in \mathbb{N}$ entonces el semigrupo es conservativo. De ahora en adelante notaremos $Q = (q_{ij})_{i,j\in I} = (P'_{ij}(o))_{i,j\in I}$ llamada la matriz Q y como transformación (conocido el dominio) generador infinitesimal. En la siguiente proposición encontramos hipótesis suficientes para la diferenciabilidad de $P(t)$ $\forall t > 0$ y además una forma de calcular las derivadas.

Proposición 49. *Si $(P(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo markoviano conservativo entonces se verifican las* ecuaciones backwards*:*

$$P'(t) = QP(t) \quad \forall \ t > 0$$

es decir: $\forall t \geq 0 \forall i, j \in I \ \ \exists p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} q_{ij} p_{kj}(t)$

Demostración. De la propiedad de semigrupo : $\forall h > 0$:

$$p_{ij}(t + h) = \sum_{k\in I} p_{ik}(h) P_{kj}(t) = p_{ii}(h) p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{p_{ij}(t + h) - p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t) \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} + \sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t)$$

Luego del lema de Fatou :

$$\liminf_{h\longrightarrow 0} \left(\frac{p_{ij}(t + h) - p_{ji}(t)}{h} \right) \geq \ q_{ii} p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t)$$

Luego debemos mostrar que: $\limsup\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} \geq \sum\limits_{k\in I} q_{ik}p_{kj}(t)$
Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq. $|I_n| \in \mathbb{N}$ y $I = \bigcup\limits_{n\geq 1} I_n$ y tomemos $i \in I$, se tiene:

$$p_{ij}(t+h) = p_{ii}(h)p_{ij}(t) + \sum_{k\in I_n\backslash\{i\}} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + \sum_{k\notin I_n} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

luego:

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} \leq p_{ij}(t)\left(\frac{p_{ii}(h)-1}{h}\right) + \sum_{k\in I_n\backslash\{i\}} \frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) + \sum_{k\notin I_n} \frac{p_{ik}(h)}{h} =\longrightarrow$$

$(P(t))_{t\geq 0}$ es markoviano, luego la última línea es :

$$\longrightarrow= p_{ij}(t)\frac{p_{ii}(h)-1}{h} + \sum_{k\in I_n\backslash\{i\}} \frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) + \left(\frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \sum_{k\in I_n\backslash\{i\}} \frac{p_{ik}(h)}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \limsup_{h \longrightarrow 0} \frac{p_{ij}-p_{ij}(t)}{h} \leq q_{ii}p_{ij}(t) + \sum_{k\in I_n\backslash\{i\}} q_{ik}p_{kj}(t) - q_{ii} - \sum_{k\in I_n\backslash\{i\}} q_{ik} =$$

$$= \sum_{k\in I_n} q_{ik}p_{kj} - \sum_{k\in I_n} q_{ik} \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\text{T.C.M}}{\longrightarrow}} \sum_{k\in I} q_{ik}p_{kj}(t) - 0$$

donde el último término es 0 ya que el semigrupo es conservativo. □

Observación: También podemos escribir las *ecuaciones forward* que se cumplen bajo hipótesis más fuertes:

$$P'(t) = P(t)Q$$

podemos desarrollar:

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$$

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h}$$

por ejemplo si $|I| \in \mathbb{N} \Rightarrow$ se cumplen las ecuaciones forward y backward. Para estudiar las ecuaciones forward y backward, y la matriz Q como generador infinitesimal, entraremos en un paréntesis analítico para estudiar semigrupos en general, comenzamos recordando la definición de Álgebra de Banach, que será el espacio de interés.

Definición 29 (Álgebra de Banach). $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, \cdot)$ *se dice Álgebra de Banach (sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$*)si:*

$(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

$\cdot : \mathcal{A}^2 \mapsto \mathcal{A}$ *es tq.* $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\| \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$.

$(\mathcal{A}, +, \cdot)$ *es un anillo y* $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}$.

Definición 30 (Semigrupo). $(P(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{A}$ *se dirá semigrupo si:*

$$P(t+s) = P(t) \cdot P(s) \quad \forall t, s \geq 0 y \; P(0) = \mathbb{I}$$

donde $\mathbb{I}$ *denota la identidad de* $(\mathcal{A}, \cdot)$.

Definición 31 (Semigrupo continuo). *El semigrupo* $(P(t))_{t \geq 0}$ *se dirá continuo si la función:* $P : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathcal{A}$ *es continua, es decir*

$$\|P(t) - P(t_0)\| \underset{t \longrightarrow t_0}{\longrightarrow} 0 \quad \forall t_0 \geq 0$$

Teorema 11. *Sea* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, \cdot)$ *álgebra de Banach, se tiene:*

- $\forall Q \in \mathcal{A} \;\; \exists \; P(t) = e^{tQ} \;\; \in \mathcal{A} \forall t \geq 0$ *y* $(P(t))_{t \geq 0}$ *es un semigrupo que satisface:*

$$\begin{aligned} \textit{las ecuaciones forward:} \quad & P'(t) = QP(t) \quad \forall t \geq 0 \; ; \; P(0) = \mathbb{I}. \\ \textit{ecaciones backward:} \quad & P'(t) = P(t)Q \quad \forall t \geq 0 \; ; \; P(0) = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

  y además las únicas soluciones de las ecuaciones forward y backward son de la forma:

$$P(t) = e^{tQ} \quad t \geq 0$$

- *Si* $(P(t))_{t \geq 0}$ *es un semigrupo continuo en* $\mathcal{A}$ *entonces:*

$$\exists Q = P'(0) \in \mathcal{A} \textit{ llamado generador infinitesimal tq} :$$

$$P(t) = e^{tQ} \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Para la primera parte, si $Q \in \mathcal{A}$, $\exists \; e^{tQ} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n Q^n}{n!} \; \in \mathcal{A}$ pues:

$$\left\| e^{tQ} \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \|Q^n\|}{n!} \leq \; e^{t\|Q\|} < \infty.$$

Sea $P(t) = e^{tQ}$, los elementos e^{tQ} y e^{sQ} , con $t, s \geq 0$ conmutan, luego

$$P(t+s) = e^{(t+s)Q} = e^{tQ} e^{sQ} = P(t)P(s).$$

Para probar que P es continuo basta probar la continuidad en 0, pues:

$$\|P(t+h)-P(t)\| = \|P(t)(P(h)-\mathbb{I})\| \leq \|P(t)\|\,\|P(h)-\mathbb{I}\|$$

$P(t)$ es continuo en 0:

$$\|P(h)-\mathbb{I}\| = \left\|\sum_{n\geq 1} h^n \frac{Q^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|h^n|\,\|Q^n\|}{n!} = \left(e^{|h|\|Q\|}-1\right) \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Probemos ahora que $P'(0)=Q$, en efecto:

$$\left\|\frac{P(h)-I}{h}-Q\right\| = \left\|\sum_{n\geq 2} \frac{|h|^{n-1}\,\|Q\|^n}{n!}\right\| \leq \frac{1}{|h|\left(e^{t|h|\|Q\|}-1-|h|\,\|Q\|\right)}$$

$$= \frac{e^{|h|\|Q\|}-1}{h} - \|Q\| \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

las ecuaciones forward y backward se satisfacen pues basta tomar $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}$.

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \left(\frac{P(h)-\mathbb{I}}{h}\right)P(t) = P(t)\left(\frac{P(h)-\mathbb{I}}{h}\right).$$

Para la unicidad de la solución consideremos que $P(t)$ satisface las ecuaciones forward y backward. Sea $\varphi(t)=P(t)e^{-tQ}$, luego:

$$\varphi'(t) = P'(t)e^{-tQ} - QP(t)e^{-tQ} = QP(t)e^{-tQ} - QP(t)e^{-tQ} = 0 \;\Rightarrow\; \varphi'(t)=0 \text{ y } \varphi(0)=\mathbb{I}.$$

Sea ahora $\eta(t)=\varphi(t)-\mathbb{I}$, concluiremos que $P(t)=e^{tQ}$ si $\eta(t)=0 \quad \forall t\geq 0$, tenemos:

$$\eta'(t)=0 \;\forall t\geq 0 \quad \eta(0)=0 \quad \|\eta(0)\|=0. \text{ y:}$$

$$\left|\frac{\|\eta(t+h)\|-\|\eta(t)\|}{h}\right| \leq \frac{\|\eta(t+h)-\eta(t)\|}{|h|} \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \|\eta(t)\|'(t) = 0 \forall t\geq 0\;,\; \eta(0)=0 \quad \Rightarrow \|\eta(t)\|=0 \;\forall t\geq 0.$$

con lo que concluimos la primera parte de la demostración.

Consideremos ahora $(P(t))_{t\geq 0}$ semigrupo continuo en $\mathcal{A}$, luego podemos definir:

$$A(t) = \int_0^t P(u)\mathrm{d}u \quad \in \mathcal{A} \quad \forall t\geq 0.$$

Observemos que $P(v)A(t)=A(t)P(v)=A(t+v)-A(v)$ y también que:

$$\frac{A(t)}{t} \underset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow} P(0)=\mathbb{I}$$

$$\Rightarrow \quad \exists s_0 > 0 \text{ tq. } \forall\ 0 < s < s_0 \quad \exists A(s)^{-1}$$

definimos entonces $Q = (P(s) - \mathbb{I})A(s)^{-1}$ para $s \in (0, s_0)$. De la definición y de las obsevaciones anteriores podemos dearrollar:

$$(P(t) - \mathbb{I})A(s) = (A(t+s) - A(t) - A(s)) = A(t)(P(s) - \mathbb{I})$$

$$\Rightarrow \quad P(t) = \mathbb{I} + A(t)Q.$$

Demostraremos ahora por inducción que $\forall n \geq 0$, se tiene:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k Q^k}{k!} + \frac{1}{n!}\left(\int_0^t (t-u)^n P(u)\mathrm{d}u\right) Q^{n+1}.$$

El desarrollo anterior corresponde al caso n=0, y si definimos:

$$R_n \doteq \frac{1}{n!}\left(\int_0^t (t-u)^n P(u)\mathrm{d}u\right) Q^{n+1}.$$

entonces el paso inductivo $n \Rightarrow n+1$ es equivalente a:

$$R_n = \frac{t^{n+1}Q^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}.$$

probemos ésto último:

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n!}\left(\int_0^t (t-u)^n (\mathbb{I} + A(u))Q\mathrm{d}u\right) Q^{n+1} \\
&= \frac{Q^{n+1}}{n!}\int_0^t (t-u)^n \mathrm{d}u + \frac{1}{n!}\int_0^t (t-u)^n A(u) Q^{n+1}\mathrm{d}uQ. \\
&= \frac{Q^{n+1}}{n!}\int_0^t (t-u)^n \mathrm{d}u + \frac{1}{n!}\left(\int_0^t (t-u)^n \int_0 uP(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\right) Q^{n+2}. \\
&= Q^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\left(\int_0^t P(v)\int_v^t (t-u)^n \mathrm{d}u\mathrm{d}v\right) Q^{n+2}. \\
&= \frac{Q^{n+1}}{(n+1)!}t^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^t (t-v)^{n+1}P(v)\mathrm{d}vQ^{n+2}
\end{aligned}$$

lo único que falta probar es que $P(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k Q^k}{k!}$ y para sto debemos probar que $\|R_n\| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\|R_n\| \leq \frac{1}{n!} \int_0^t (t-u)^n \|P(u)\| \, \mathrm{d}u \, \|Q\|^{n+1}$$

$$\leq \sup_{u \leq t} \{\|P(u)\|\} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \|Q\|^{n+1} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Volvamos ahora al estudio de los emigrupos markovianos:

Definición 32 ($(P(t))_{t \geq 0}$ semigrupo markoviano uniforme). *$(P(t))_{t \geq 0}$ semigrupo markoviano standard se dice uniforme si $p_{ii}(h) \underset{h \searrow 0}{\longrightarrow} 0$ uniformemente es decir:*

$$\lim_{h \searrow 0} \left(\sup_{i \in I} |p_{ii}(h) - 1| \right) = 0.$$

Consideremos ahora el álgebra de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, \cdot)$ $\mathcal{A} = \{M = (m_{ij})_{i,j \in I} \mid \|M\| < \infty\}$, $\|M\| = \sup_{i \in I} \sum_{j \in I} |m_{ij}| < \infty$, y $\cdot$ el producto habitual de matrices. En éste contexto podemos estudiar los semigrupos markovianos uniformes, pues :

Proposición 50. *Sea $(P(t))_{t \geq 0}$ semigrupo (sub)markoviano uniforme, se tiene:*

- *$P(t) \in \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$.*
- *P es semigrupo continuo en $\mathcal{A}$.*

Demostración. $(P(t))_{t \geq 0}$ es submarkoviano, luego $\|P(t)\| = \sup_{i \in I} \sum_{j \in I} p_{ij}(t) \leq 1$ por lo que $P(t) \in A \;\; \forall t \geq 0$. $P(t)$ es continuo en 0:

$$\|P(t) - \mathbb{I}\| = \sup_{i \in I} |p_{ii}(t) - 1| + \sum_{j \neq i} \leq \sup_{i \in I} 2(p_{ii}(t) - 1)$$

y sabemos que $(p_{ii}(t) - 1) \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. uniformemente. □

De la discusión anterior sobre semigrupos en un Álgebra de Banach, tenemos que:

$$\exists Q \in \mathcal{A} \text{ el generador infinitesimal } Q = P'(0) \text{ tq. } P(t) = e^{tQ} \quad \forall t \geq 0.$$

los coeficientes de Q corresponden a los q_{ij} que habíamos calculado antes:

$$\left| \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{h} - Q_{ij} \right| \leq \left\| \frac{P(h) - \mathbb{I}}{h} - Q \right\| \underset{h \searrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

$$\Rightarrow Q_{ij} = q_{ij} = p'_{ij}(0) \quad \forall i,j \in I.$$

Además el semigrupo es estable pues:

$$Q \in \mathcal{A} \Rightarrow \ \forall i \in I \quad |q_{ii}| \leq \|Q\| \leq \infty \text{ luego } \sup_{i\in I} q_i \leq \infty.$$

podemos ahora enunciar el siguiente :

Teorema 12. *Si* $(P(t))_{t\geq 0}$ *es semigrupo submarkoviano standard, son equivalentes :*

(a) P *es uniforme.*

(b) $Q = (q_{ij})_{i,j\in I}$ *es estable. y ambas implican :*

$$(P(t))_{t\geq 0} \textit{ es markoviano } \Leftrightarrow Q \textit{ es conservativo}$$

$$\textit{i.e.} \sum_{j\in I} q_{ij} = 0 \quad \forall i \in I$$

Demostración. Recordemos que si P es estable $(q_{ii} > -\infty \ \forall i \in I)$, se tiene $\sum_{i\in I} q_{ij} \leq 0$.

$$\Rightarrow \quad \sum_{j\neq i} q_{ij} \leq -q_{ii} \Rightarrow \quad \sum_{j\in I} |q_{ij}| \leq 2q_i.$$

(a) $\Rightarrow$ (b) ya esá probado. (b) $\Rightarrow$ (a) : $Q \in \mathcal{A}$ pues $\sup_{i\in I} \sum_{j\in I} \leq 2 \sup_{i\in I} q_i < \infty$. del T.V.M:

$$\exists \xi \in [0,t] \text{ tq. } p_{ii}(t) = 1 + tp'_{ii}(\xi).$$

de la demostración de las ecuaciones backward, pero sin usar conservatividad, se tiene:

$$\begin{aligned} p'_{ii}(\xi) &\geq q_{ii}p_{ii}(\xi) + \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{ki}(\xi). \\ &\geq q_{ii} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad p_{ii}(t) - 1 = tp'_{ii}(\xi) \geq tq_{ii} \text{ y se tiene:}$$

$$\sup_{i\in I} |p_{ii}(t) - 1| \leq t \cdot \sup_{i\in I} |q_{ii}| \leq t \sup_{i\in I} |q_{ii}| \leq t \cdot M.$$

luego (a) y (b) son equivalentes y se deduce que en éste caso $P(t) = e^{tQ} \quad \forall t \geq 0$. Probemos la última parte, estamos asuminedo que (a) y (b) se cumplen. Sea $\alpha > 0$ tq. $\inf_{i\in I}(-q_{ii}) \geq -\alpha$, y consideremos:

$$\hat{Q} = \frac{1}{\alpha} Q + \mathbb{I}$$

se tiene: $\hat{Q}_{ij} = \frac{1}{\alpha} q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j; \quad \hat{Q}_{ii} = \frac{1}{\alpha} q_{ii} + 1 \geq 0$ luego $\hat{Q} \geq 0$, y además:

$$\begin{aligned}\sum_{j \in I} \hat{Q}_{ij} = \frac{1}{\alpha} \sum_{j \in I} q_{ij} + 1 = \frac{1}{\alpha} \left(q_{ii} + \alpha + \sum_{j \neq i} q_{ij} \right) \\ \leq \frac{1}{\alpha} \{ q_{ii} + \alpha - q_{ii} \} \leq 1.\end{aligned}$$

con lo que tenemos que la matriz $\hat{Q}$ es markoviana, y además:

$$\hat{Q} \text{ es markoviana} \Leftrightarrow Q \text{ es conservativa, ya que:}$$
$$\sum_{j \in I} \hat{Q}_{ij} = 1 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} \Leftrightarrow \sum_{j \in I} q_{ij} = 0 \quad \forall i \in I.$$

para concluir probaremos:

$$P \text{ es markoviano} \Leftrightarrow \hat{Q} \text{ es markoviano.}$$

se tiene:

$$Q = \alpha \hat{Q} - \alpha \mathbb{I} \text{ y además:}$$

$$\begin{aligned}P(t) = e^{tQ} = e^{-\alpha t \hat{Q}} (\text{pues } \mathbb{I}, \hat{Q} \text{ conmutan}) \\ e^{-\alpha t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha t)^n \hat{Q}^n}{n!}\end{aligned}$$

$\hat{Q}$ submarkoviana $\Rightarrow \quad \hat{Q}^n$ submarkoviana $\Rightarrow \quad \hat{Q}^n \, \mathbb{1} \leq 1$, luego:

$$P(t) \, \mathbb{1} = e^{-\alpha t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \hat{Q}^n \, \mathbb{1} \leq 1$$

con lo que se tiene: $P(t) \, \mathbb{1} = 1$ (i.e. $P(t)$ es markoviana) $\Leftrightarrow \quad \hat{Q}^n \, \mathbb{1} = 1 \quad \forall n \geq 0$.
$\Leftrightarrow \quad Q$ es markoviana, y ésto $\forall t \geq 0$. □

3.1. Interludio sobre distribuciones exponenciales

Definición 33 ($\xi \sim$ exp$[\lambda]$). *Si ξ es una v.a. en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ decimos que es exponencial de parámetro λ ($\lambda \in [0, \infty]$), y lo anotamos $\xi \sim exp[\lambda]$ si*

$$\mathbb{P} \{ \xi > t \} = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0.$$

Observación. Sea $\xi \sim \exp[\lambda]$

- si $\lambda = 0 \; \Rightarrow \quad \xi \sim \delta_\infty$.
- si $\lambda = \infty \; \Rightarrow \quad \xi \sim \delta_0$.

- si $\lambda \in (0,\infty) \Rightarrow \quad \xi$ se concentra en $\mathbb{R}_+$ y ξ tiene densidad de probabilidad:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0.$$

en éste último caso, tenemos:

$$\mathbb{E}(e^{-r\xi}) = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+r)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda + r}$$

de donde se sigue:

Proposición 51. *Si $\xi \sim exp[\lambda]$, con $\lambda \in (0,\infty) \Rightarrow \quad \mathbb{E}(e^{-r\xi}) = \frac{\lambda}{\lambda+r}$, en particular:*

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad Var(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Proposición 52. *Sean $\{\xi_i\}_{i\in I}$, $\xi_i \sim exp[q_i]$, $q_i \in (0,\infty) \quad \forall i \in \mathbb{N}$ entonces:*

(a) $\sum_{i\in I} q_i^{-1} < \infty \Rightarrow \quad \sum_{i\in I} x_i < \infty \quad \mathbb{P} - c.s..$

(b) $\sum_{i\in I} q_i^{-1} = \infty \Rightarrow \quad \sum_{i\in I} x_i = \infty \quad \mathbb{P} - c.s..$

Observación. Notar que (b) es más fuerte que la recíproca de la contrarecíproca de (a).

Demostración. Para (a) :

$$\mathbb{E}(\sum_{i\in I} \xi_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(\xi_i) = \sum_{i\in I} q_i^{-1} < \infty.$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I} \xi_i < \infty \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Para (b) podemos suponer $q_i \in (0,\infty) \quad \forall i \in I$, los ξ_i son independientes, luego del T.C.M:

$$\mathbb{E}(e^{-\sum\limits_{i\in I}\xi_i}) = \prod_{i\in I} \mathbb{E}(e^{-\xi_i}) = \prod_{i\in I} \left(\frac{q_i}{q_i+1}\right) = \left(\prod_{i\in I}(1+q_i^{-1})\right)^{-1}$$

ahora bien, se tiene que si $\alpha_i > 0 \quad i \in I$

$$\prod_{i\in I}(1+\alpha_i) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i\in I} \alpha_i = \infty.$$

luego $\sum_{i\in I} q_i^{-1} = \infty \Rightarrow \quad \prod_{i\in I}(1+q_i^{-1}) = \infty.$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{-\sum\limits_{i\in I}\xi_i}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i\in I} \xi_i = \infty \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

$\square$

Proposición 53. *Sean X, Y v.v.a.a. positivas, finitas, e independientes, se tiene:*

si X tiene densidad $f_x \Rightarrow X+Y$ tiene densidad f_{x+y}

si f_x es acotada, digamos $f_x \leq K \quad \Rightarrow \quad f_{x+y} \leq K$

si f_x es continua $\Rightarrow f_{x+y}$ es continua.

Demostración. $F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\}$, luego:

$$\mathbb{P}\{X+Y \leq z\} = \int_0^z \mathbb{P}\{X \leq z-y \mid Y=y\} \mathrm{d}F_Y(y)$$

$$X, Y \text{ indep. } \Rightarrow = \int_0^z F_X(z-y)\mathrm{d}F_Y y = F_X * F_Y(z)$$

luego:

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z f_x(z-y)\mathrm{d}F_Y(y).$$

de donde se siguen las dos propiedades enunciadas. □

Corolario 5. *Sean $\xi_i \sim exp[q_i]$, con $q_i \in (0,\infty) \quad \forall i \in I$. si $\sum_{i\in I} \xi_i < \infty \quad \mathbb{P}$-c.s ,entonces $\sum_{i\in I} \xi_i$ tiene densidad f continua y $f \leq q_{i_0}$ para cualquier $i_o \in I$.*

Demostración. Considerar $X = \xi_{i_0}$, $Y = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \xi_i$, y aplicar la propiedad anterior teniendo en cuenta que:

$$f_{\xi_{i_0}} = q_{i_0}e^{-q_{i_0}t} \leq q_{i_0}.$$

□

La propiedad más importante de las v.a. exponenciales, y que además las caracteriza es la llamada pérdida de memoria:

Proposición 54 (Pérdida de memoria). *Sea X v.a. positiva, enonces:*

$$\mathbb{P}\{X > s+t \mid X > s\} = \mathbb{P}\{X > t\} \quad \forall s,t \geq 0. \Leftrightarrow \qquad \exists\ \lambda \in [0,\infty] \ tq.\ X \sim exp[\lambda].$$

Demostración. Sea $\alpha(t) = \mathbb{P}\{X > t\}$, se tiene:

$$\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s) \quad \forall s,t \geq 0.$$

luego $log(\alpha(t))$ es medible, aditiva, a valores en $\mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \quad \exists\lambda \in [0,\infty] \ \ t.q. \quad \alpha(t) = e^{-\lambda t}.$$

□

Definición 34 (Cadena de Markov a tiempo continuo). *Sea como antes I numerable, discreto, y $(\Omega, \beta, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, con $X_t : \Omega \mapsto I$ tq:*

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow I \quad \textit{es medible} \\ (\omega, t) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

entonces $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es Cadena de Markov *si cumple la propiedad markoviana:*

$$\mathbb{P}\left\{X_t = j \;\mid\; x_{s_1} = i_1, \ldots, x_{s_n} = i_n\right\} = \mathbb{P}\left\{X_t = j \;\mid\; x_{s_n} = i_n\right\}$$

$$\forall 0 \leq s_1 < \ldots < s_n < t \qquad i_1, \ldots, i_n \in I$$

Además la Cadena de Markov se dice homogénea *si:*

$$\mathbb{P}\left\{X_t = j \;\mid\; x_s = i\right\} = \mathbb{P}\left\{x_{t-s} = j \;\mid\; x_0 = i\right\} \doteq \mathbb{P}_i\left\{x_{t-s} = j\right\}.$$

$$\forall 0 \leq s < t \quad \forall i, j \in I.$$

Diremos que la cadena de markov es a trayectorias càdlàg *si la función:*

$$\begin{aligned} X_{\cdot(\omega)} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow I \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

es continua a la derecha con límite a la izquierda $\mathbb{P}$-c.s.

Proposición 55. *Sea $X = (X_t)_{t\in R_+}$ cadena de Markov homogénea a valores en I, entonces:*

$$P = (P(t))_{t\geq 0}, \quad P_t = (p_{ij}(t))_{i,j\in I} \quad \textit{dado por}$$

$P_{ij}(t) = \mathbb{P}_i\left\{X_t = j\right\}$; es un semigrupo markoviano. Además si X es a trayectorias càdlàg, se tiene que el semigrupo markoviano P es standard.

Demostración. Probemos que P_t es markoviano $\forall t \geq 0$

- $P_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i, j \in I \quad \forall t \geq 0$
- $\sum\limits_{j\in I} p_{ij}(t) = \sum\limits_{j\in I} \mathcal{P}_i\left\{X_t = j\right\} = 1.$

probemos ahora que P es semigrupo:

$$P(t+s) = P(t)P(s) \text{ equivale a:}$$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)p_{kj}(s) \quad \forall i, j \in I$$

probemos ésto último:

$$\mathbb{P}\{x_{t+s}, x_0 = i\} = \sum_{k\in I} \mathbb{P}\{x_{t+s} = j, X_t = k, x_0 = i\}$$
$$\mathbb{P}\{x_{t+s}, x_0 = i\} = \sum_{k\in I} \mathbb{P}\{x_{t+s} = j \mid X_t = k, x_0 = i\} \mathbb{P}\{X_t = k, x_0 = i\}$$

así, dividiendo por $\mathbb{P}\{x_0 = i\}$ nos queda:

$$\underbrace{\mathbb{P}\{x_{t+s} \mid x_0 = i\}}_{p_{ij}(t+s)} = \sum_{k\in I} \underbrace{\mathbb{P}\{x_{t+s} = j \mid X_t = k\}}_{p_{kj}(s)} \underbrace{\mathbb{P}\{X_t = k \mid x_0 = i\}}_{p_{ik}(t)}$$

Ejercicio 21. Demostrar que P es standard.

$\square$

En la proposición enterior vimos que la matriz de transición $P_t = (p_{ij})_{i,j\in I}$ de una Cadena de Markov homogénea es un semigrupo markoviano en el álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que definimos antes. Ahora veremos que a un semigrupo markoviano siempre se le puede asociar una Cadena de Markov, salvo que deberemos agregar un estado "ficticio" adicional.

Proposición 56. *Sea $P = (P_t)_{t\geq 0}$ semigrupo markoviano estable, y*

$$Q = (q_{ij} = p'_{ij}(0))_{i,j\in I}$$

Sea $\partial \notin I$, notemos $\hat{I} = I \bigcup \{\partial\}$ y extendemos Q a $\hat{I} \times \hat{I}$ por $q_{\partial j} = q_{\partial\partial} = 0 \quad \forall j \in I$, i.e. ∂ es un estado absorbente para Q.
Entonces $\exists X = (X_t)_{t\geq 0}$cadena de Markov a valores en $\hat{I}$, con trayectorias càdlàg tal que:
$r_{ij}(t) = \mathbb{P}_i\{X_t = j\}$ es su semigrupo asociado, y se cumple:

$$r'_{ij}(0) = q_{ij} \quad \forall i,j \in I.$$

Observación: Si $i \in \hat{I}$ es absorbente, se tiene que $q_{ij} = 0$. En efecto: $p_{ii}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \quad q_{ii} = 0$. Como $\sum_{j\in I} \leq -q_{ii}$ se tiene $q_{ij} = 0 \quad \forall j \in I$.

Demostración. Como el semigrupo es estable $q_i = -q_{ii} < \infty \quad \forall i \in I$ recordemos que $\sum_{j\neq i} q_{ij} \leq q_i$. Definamos la siguiente matriz estocástica: $S = (s_{ij})_{i,j\in\hat{I}}$, como

- si $q_i = 0$ (en particular si $i = \partial$) entonces:

$$s_{ii} = 1 \text{ y } s_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

- si $q_i > 0$ entonces: $s_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{si } j \neq i, \ j \in I. \\ 1 - \frac{1}{q_i} \sum\limits_{k \neq i} q_{ik} & \text{si } \partial = j. \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$

Consideramos ahora $\Omega = (\hat{I} \times \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ dotado de la σ- álgebra producto, notamos $\omega \in \Omega$ como $\omega = (i_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e introducimos las v.a. coordenadas:

$$\begin{aligned} Y_n : \Omega &\longrightarrow \hat{I} & \xi_n : \Omega &\longrightarrow \hat{I} \\ \omega &\longmapsto Y_n(\omega) = i_n & \omega &\longmapsto \xi_n(\omega) = t_n \end{aligned}$$

Ahora fijemos $i \in I$, y definamos la siguiente medida de probabilidad en Ω:

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \ \mid \ \xi_k \in [T_k, \infty) \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\}\right\} = \delta_{ii_0} \left(\prod_{k=1}^{n} S_{i_{k-1} i_k} \right) e^{-\sum\limits_{l=0}^{n} q_{ik} T_k}$$

$$\text{para } i_0, \ldots, i_k \in \hat{I} \ ; \ T_0, \ldots, T_k > 0.$$

La probabilidad marginal en $\hat{I}^{\mathbb{N}}$ está dada por la matriz de transición de la cadena de Markov $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con matriz de transición S.

$$\mathbb{P}_i \left\{\omega \in \Omega \ \mid \ Y_k(\omega) = i_k \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\}\right\} = \delta_{i_o i} \prod_{k=1}^{n} S_{i_{k-1} i_k}.$$

Ahora bien, dada una trayectoria de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la medida condicional está dada por:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_k > T_k \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\} \ \mid \ Y_k = i_k \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\}\right\} = e^{-\sum\limits_{k=0}^{n} q_{ik} T_k}$$

es decir $(\xi_k)_{k=0,\ldots,n} \ \mid \ (Y_k)_{k=0,\ldots,n}$ es un vector de v.v.a.a. exponenciales independientes con $\xi_k \sim \exp[q_{Y_k}] \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\}$. Definimos :

$$\tau(\omega) \doteq \sum_{k \geq 0} \xi_k(\omega).$$

que denominaremos el *instante de la primera explosión*. Definimos además:

$$X_t = \begin{cases} Y_n & \text{si } \sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k \leq t < \sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k. \\ \partial & \text{si } t \geq \tau. \end{cases}$$

Por definición $X = (X_t)_{t \geq 0}$ toma valores en $\hat{I}$, tiene límite a la izquierda (salvo en ∂) y es continua a la derecha. Observemos que si para algún $t \geq \tau$ se tiene $X_t = i$ con i absorbente, dado que $q_i = 0$ se obtiene $X_s = i \quad \forall s \geq t$ (pues si $Y_n = i$ $\xi_n \sim \exp[q_i] = \exp[0] = \delta_\infty$). Por otra parte la

cadena alcanza ∂ si $\tau < \infty$ o desde algún estado $i \in I$ que no sea conservativo ($S_{i\partial} = 1 - \sum\limits_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i}$).
Si $i = i_0$ no es absorbente, siempe se salta después de ξ_0 a un estado $j \neq i$ con probabilidad S_{ij} (dado que $S_{ii} = 0$)
Asumamos que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ cumple la propiedad de Markov, sea:

$$R(t) = (r_{ij}(t) = \mathbb{P}_i \{X_t = j\})_{i,j \in I}$$

el semigrupo asociado a X, debemos probar:

$$r'_{ij}(0) = q_{ij} \quad \forall i, j \in I.$$

para lo cual preparamos los siguentes:

Lema 9. $\mathbb{P}_i \{\xi_0 + \xi_1 \leq t \;\; | \;\; Y_0 = i, Y_1 = j\} = o(t)$

Demostración. Sea $\alpha_{ij}(t) = \mathbb{P}_i \{\xi_0 + \xi_1 \leq t \;\; | \;\; Y_0 = i, Y_1 = j\}$, tenemos que:
$(\xi_0, \xi_1) \;\; | \;\; (Y_0 = i, Y_1 = j)$ son exponenciales independientes de parámetros q_i, q_j, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \alpha_{ij}(t) = \int_0^t q_i e^{-q_i s} q_j e^{-q_j(t-s)} \mathrm{d}s.$$

como $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{ij}(t)$ es continua, se tiene $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{ij}(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, $\alpha_{ij}(0) = 0$. se decuce $\alpha_{ij}(t) = \int\limits_0^t \alpha'_{ij}(s)\mathrm{d}s = o(t)$.
Si i o j son absorbentes, entonces $\alpha_{ij}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ (pues $\xi_0 = \infty \vee \xi_1 = \infty \quad \mathbb{P} -$ c.s.) $\square$

Observación. Lo único que se usó en la demostración anterior fue la estabilidad ($q_i < \infty \quad \forall i \in I$) que está en la hipótesis de la proposición.

Lema 10. $\mathbb{P}_i \{\xi_0 + \xi_1 \leq t\} = o(t)$.

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \sum_{j \in \hat{I} \setminus \{i\}} \mathcal{P}_i \{\xi_0 + \xi_1 \leq t \;\; | \;\; Y_0 = i, \; Y_1 = j\} \mathbb{P}_i \{Y_1 = j\} \\ &= \sum_{j \in \hat{I} \setminus \{i\}} \alpha_{ij}(t) S_{ij}. \end{aligned}$$

y además:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{ij}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}_i \{\xi_0 + \xi_1 \leq t \;\; | \;\; Y_0 = i, \; Y_1 = j\} \leq q_i.$$

ya que j no es absorbente y $f_{\xi_0 \;|\; Y_0 = i}(t) \leq q_i$. De $\alpha_{ij}(t) = \int\limits_0^t \alpha'_{ij}(s)\mathrm{d}s \leq q_i t$, se deduce que $\alpha_{ij}(t) \leq q_i t \quad \forall j$ no absorbente. Si j es absorbente $\alpha_{ij}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.
Resumiendo: si i no es absorbente :

$$\frac{\beta_{ij}(t)}{t} = \sum_{j \in \hat{I} \setminus \{i\}} \frac{\alpha_{ij}(t)}{t} S_{ij}.$$

como:

$$\frac{\alpha_{ij}(t)}{t} \leq q_{ij} \wedge \frac{\alpha_{ij}(t)}{t} \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$$

$$\wedge \sum_{j \in \hat{I} \setminus \{i\}} \frac{\alpha_{ij}(t)}{t} S_{ij} \leq \sum_{j \in \hat{I} \setminus \{i\}} q_i S_{ij} = \sum_{j \in \hat{I} \setminus \{i\}} q_{ij} \leq q_i.$$

del T.C.D se deduce:

$$\frac{\beta_i(t)}{t} \underset{t \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \text{luego } \beta_i(t) = o(t).$$

□

Probemos ahora que $r'_{ij}(0) = q_{ij} \quad \forall i, j \in I$.

- Sea $j = i$. Si i es absorbente $q_{ii} = 0 = r'_{ij}(0)$, luego suponemos i no absorbente, se tiene:

$$\begin{aligned} r_{ii}(t) &= \mathbb{P}_i \{X_t = i\} = \mathbb{P}_i \{\xi_0 > t,\ X_t = i\} + \mathbb{P}_i \{\xi_0 \leq t,\ X_t = i\} \\ (i \text{ no absorbente } \Rightarrow Y_1 \neq i) &= \mathbb{P}_i \{\xi_0 > t\} + \mathbb{P}_i \{\xi_0 \leq t,\ \xi_0 + \xi_1 \leq t,\ X_t = i\} \\ (\text{ del lema } 10) &= e^{-q_i t} + o(t). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad r'_{ii}(0) = -q_i = q_{ii}.$$

- Sea $j \neq i$. Nuevamente podemos suponer i no absorbente:

$$\begin{aligned} r_{ij}(t) &= \mathbb{P}_i \{X_t = i\} \\ (\text{ como } j \neq i) &= \mathbb{P}_{\xi_0 \leq t,\ \xi_0 + \xi_1 > t, X_t = j} + \mathbb{P}_i \{\xi_0 \leq t,\ \xi_o + \xi_1 \leq t, X_t = j\}. \\ (\text{ del lema } 10) &= \mathbb{P}_i \{\xi_0 \leq t,\ \xi_0 + \xi_1 > t,\ Y_1 = j\} + o(t) \\ &= \mathbb{P}_i \{\xi_0 \leq t,\ \xi_0 + \xi_1 > t \ \mid\ Y_1 = j\} \mathbb{P}_i \{Y_1 = j\} + o(t) \\ &= \mathbb{P}_i \{\xi_0 \leq t,\ \xi_0 + \xi_1 > t \ \mid\ Y_1 = j\} \frac{q_{ij}}{q_i} + o(t) \\ &= \left(\int_0^t q_i e^{-q_i s} \underbrace{e^{-q_j(t-s)}}_{\mathbb{P}\{[\sim \exp[q]_j] > t-s\}} \mathrm{d}s \right) \frac{q_{ij}}{q_i} + o(t) \\ &= q_{ij} e^{-q_j t} \int_0^t e^{-s(q_i - q_j)} \mathrm{d}s + o(t). \end{aligned}$$

luego:

$$r'_{ij}(0) = q_{ij} \left(-q_j e^{-q_j t} \int_0^t e^{-s(q_i - q_j)} \mathrm{d}s \Big|_{t=0} \right) + q_{ij} \left(e^{-q_j t} e^{-t(q_i - q_j)} \Big|_{t=0} \right) = q_{ij}$$

□

Proposición 57. *En una cadena de Markov standard a trayectioras càdlàg se tiene que los tiempos de permanencia en los estados (definido por* $\xi_i = \inf\{t > 0 \mid X_t \neq i\}$*) son exponenciales* $\exp[q_i]$.

Demostración. Sea: $\xi_i = \inf\{t > 0 \mid X_t \neq i\}$, luego:

$$\mathbb{P}\{\xi_i > t + s\} = \mathbb{E}_i\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\xi_i > t+s\}}\right) \mid \beta_0^t\right)$$

Pues $\beta_0^t = \sigma\left((X_a)_{a\in[0,t]}\right)$ como $\{\xi_i > t\} \in \beta_0^+$

$$\mathbb{P}\{\xi_i > t + s\} = \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{\xi_i > t\}}\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\theta_t(\xi_i) > s\}} \mid \beta_0^t\right)\right)$$

además se tiene:

$$\mathbb{1}_{\{\xi_i > t+s\}} = \mathbb{1}_{\{\xi_i > t\}}\,\mathbb{1}_{\{\theta_t(\xi_i) > s\}}$$

Donde $\theta_t(\xi_i)(\omega) = \xi_i(\theta_t\omega)$,si $\omega = (\omega_\nu)_{\nu\geq 0}$,entonces $\theta_t(\omega) = (\omega_\nu)_{\nu\geq t}$, volviendo al cálculo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\xi_i > t + s\} &= \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{\xi_i > t\}}\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\xi_i > s\}} \circ\theta_t \mid \beta_0^t\right)\right)\\
\text{(de la propiedad de Markov)} &= \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{\xi_i > t\}}\,\mathbb{E}_{X_t}\left(\mathbb{1}_{\{\xi_i > s\}}\right)\right)\\
&= \mathbb{P}_i\{\xi_i > s\}\,\mathbb{P}_i\{\xi_i > t\} \quad \forall s,t \geq 0.
\end{aligned}$$

y se concluye que $\exists\lambda_i > 0$ tq:

$$\mathbb{P}_i\{\xi_i > t\} = e^{-\lambda_i t} \quad \forall t \geq 0.$$

debemos mostrar ahora que $\lambda_i = q_i$, se tiene:

$$q_i = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1 - \mathbb{P}_i\{X_t = i\}}{t} \text{ y:}$$

$$\mathbb{P}_i\{X_t = i\} = \mathbb{P}_i\{\xi_i > t\} + \mathbb{P}_i\{\xi_i \leq t,\ \xi_i + \xi_{Y_1} \leq t,\ X_t = i\}.$$

luego para que $\lambda_i = q_i$ basta $\mathbb{P}_i\{\xi_i \leq t,\ \xi_i + \xi_{Y_1} \leq t,\ X_t = i\} = o(t)$. lo que se deja como

Ejercicio 22.

(condicionar c/r a β_0^ξ y usar propiedad càdlàg). □

4. Procesos de Nacimiento y Muerte

Definición 35 (Proceso de nacimiento puro). *La cadena de Markov* $(N(t))_{t\geq 0}$ *es un proceso de nacimento con parámetros* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *si verifica:*

(i) $\mathrm{N}(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \lambda_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0$

(ii) $s \leq t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$ *(el proceso es creciente.)*

(iii) $\mathbb{P}\left\{N(t+h) = n \mid N(t) = n\right\} = 1 - \lambda_n h + o(h)$

(iv) $\mathbb{P}\left\{N(t+h) = n+1 \mid N(t) = n\right\} = \lambda_n h + o(h)$

Observación: Luego $\mathbb{P}\left\{N(t+h) \notin \{n, n+1\} \mid N(t) = n\right\} = o(h)$. $N(t)$ puede interpretarse como el número de individuos de una población, λ_n se denominan las tasas de nacimiento. La condicóin anterior implica que en un intervalo pequeño de tiempo no puede nacer más que un individuo. Es fácil para éste proceso escribir la matriz Q, pues se tiene de *(iii)* y *(iv)*:

$$
\begin{array}{llll}
q_{nn} & = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \frac{p_{nn}(h)-1}{h} & = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \frac{-\lambda_n h}{h} & = -\lambda_n. \\
q_{n,n+1} & = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \frac{p_{n,n+1}(h)}{h} & = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \frac{\lambda_n h}{h} & = \lambda_n \\
q_{n,m} & = 0 \quad \forall n \notin \{n, n+1\}. & &
\end{array}
$$

con lo que tenemos la siguente:

Proposición 58. *La matriz* $Q = (q_{nm} = p_{nm'(0)})_{n,m\in\mathbb{N}}$ *del proceso de nacimiento tiene la forma:*

$$
Q = \begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots \\
0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & -\lambda_n & \lambda_n & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

Q es estable y conservativo $\left(\sum\limits_{m\geq 0} q_{n,m} = 0 \quad \forall n \geq 0\right)$, *además se verifican las ecuaciones forward:*

$$P'(t) = P(t)Q,$$

y las ecuaciones backward:

$$P'(t) = QP(t).$$

Supongamos que el proceso parte con n_0 individuos, es decir:

$$\mathbb{P}_{n_0}\{N(0)=n\}=\delta_{nn_0}$$

y denotemos:

$$P_n(t)=p_{n_0n}(t)=\mathbb{P}_{n_0}\{N(t)=n\}$$

luego de las ecuaciones forward se obtiene:

$$p'_{n_0n}(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}p_{n_0m}q_{mn}$$

es decir

$$\begin{aligned}P'_n(t)&=\sum_{n\in\mathbb{N}}P_m(t)q_{mn}\\&=P_{n-1}(t)q_{n-1n}+P_n(t)q_{nn}\\&=\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)-\lambda_nP_n(t)\quad\forall n>n_0.\end{aligned}$$

Como $N(t)$ es creciente con t se tienen las condiciones:

$$\begin{aligned}P_n(t)&\equiv 0\quad\forall n<n_0.\\P_{n_0}(0)&=0\end{aligned}$$

de donde obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}P'_{n_0}(t)&=-\lambda_{n_0}P_{n_0}(t)\\P'_n(t)&=\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)-\lambda_nP_n(t)\quad\forall n>n_0.\\P_{n_0}(0)&=1\\P_n(0)&=0\quad\forall n>n_0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

de donde obtenemos:

$$P_{n_0}(t)=e^{-\lambda_{n_0}t}$$

y de (4.1) iterando podemos calcular $P_n(t)\quad\forall n\geq 0$, por ejemplo si $\lambda_n=\lambda>0\quad\forall n\geq 0$, se tiene:

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^{n-n_0}e^{-\lambda t}}{(n-n_0)!}\quad\forall n\geq n_0.$$

que corresponde a las probabilidades de transición de un proceso de Poisson, partiendo de n_0.
Observación: Asumiremos $\lambda_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$, pues si existe un $\lambda_k=0$ con $k\geq n_0$, k se convierte en un estado absorbente y la cadena se mantiene en $[n_0,k]$, y estaríamos en el caso de una cadena a estados finitos. Como la cadena toma valores en $\mathbb{N}$, identificaremos el estado "ficticio" ∂ con $\infty\notin\mathbb{N}$, diremos que la cadena *tiene explosión* si

$$\exists t>0 \text{ tq. } \mathbb{P}\{N(t)=\infty\}>0.$$

Proposición 59. *La cadena de nacimiento puro $N(t))_{t\geq 0}$ tiene explosión* $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geq n_0} \lambda_n^{-1} < \infty$. *es decir:*

$$\textit{no hay explosión} \Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{N(t)\in\mathbb{N}\right\}=1 \Leftrightarrow \sum_{n\geq n_0}\lambda_n^{-1}=\infty.$$

Demostración. Recordemos que $\mathbb{P}\left\{N(0)=n_0\right\}=1$, sea $n\geq n_0$, definamos:

$$S_n(t)=\sum_{k=n_0}^{n}P_k(t)=\mathbb{P}_{n_0}\left\{N(t)\leq n\right\}.$$

y sea: $S(t)=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}S_n(t)=\mathbb{P}_{n_0}\left\{N(t)\in\mathbb{N}\right\}$
se tiene que **no** hay explosión ssi $S(t)=1\quad\forall t\geq 0$: como $n\geq n_0$, de (4.1) obtenemos:

$$S_n'(t)=\sum_{k=n_0}^{n}P_k'(t)=-\lambda_n P_n(t)$$

como $S_n(0)=1\quad\forall n\geq n_0$, se deduce:

$$S_n(t)=1-\lambda_n\int_0^t P_n(u)\mathrm{d}u.$$

de donde podemos reescribir las desigualdades:

$$1-S(t)\leq 1-S_n(t)\leq 1.$$

de la forma:

$$(1-S(t))\lambda_n^{-1}\leq\int_0^t P_n(u)\mathrm{d}u\leq\lambda^{-1}.$$

sumamos las desigualdades anteriores y tenemos:

$$(1-S(t))\sum_{n\geq n_0}\lambda_n^{-1}\leq\underbrace{\int_0^t S_n(u)\mathrm{d}u}_{\leq t}\leq\sum_{n\geq n_0}\lambda^{-1}.$$

- Consideremos $\sum\limits_{n\geq n_0}\lambda_n^{-1}=\infty$ como $\int\limits_0^t S_n(u)\mathrm{d}u\leq 1\quad\forall t\geq 0$

  $$\Rightarrow\quad S(t)=1\quad\forall t\geq 0.$$

- Consideremos $\sum\limits_{n\geq n_0}\lambda_n^{-1}<\infty$, si no hay explosión:

  $$S(u)=1\quad\forall u\geq 0 \text{ y se obtendría } t\leq\sum_{n\geq n_0}\lambda_n^{-1}<\infty\quad\forall t\geq 0$$

lo que es una contradicción, luego en éste caso hay explosión.

□

Resumiendo, como $\frac{q_{nn+1}}{q_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1$ cuando se deja el estado n necesariamente se pasa a $n+1$, además los tiempos de permanencia en los estados son $\xi_i \sim \exp[\lambda_{n_0+i}]$.

Definición 36 (Proceso de nacimiento y muerte). *La cadena de Markov homogénea* $(N(t))_{t\geq 0}$ *es un proceso de nacimiento y muerte con parámetros*

$$\begin{array}{ll} (\lambda_n)_{n\geq 0} & \textit{(tasas de nacimiento)} \\ (\mu_n)_{n\geq 0} & \textit{(tasas de muerte)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{con } \mu_0 = 0,\ \lambda_0 \geq 0 & \lambda_n > 0 \quad \forall n > 0 \\ & \mu_m > 0 \quad \forall n > 0. \end{array}$$

que verifica:

(i) $\mathbb{P}\{N(t+h) = n+1 \mid N(t) = n\} = \lambda_n h + o(h)$

(i) $\mathbb{P}\{N(t+h) = n-1 \mid N(t) = n\} = \mu_n h + o(h)$

(iii) $\mathbb{P}\{N(t+h) = n \mid N(t) = n\} = 1 - (\lambda_n + \mu_n)h + o(h)$.

Observación: Luego $\mathbb{P}\{|N(t+h) - N(t)| > 1 \mid N(t) = n\} = o(h)$, éste proceso no es creciente ya que estamos permitiendo que mueran individuos, pero de todas formas en un intervalo suficientemente pequeño sólo puede nacer o morir sólo un indivudo. Nuevamentes es fácil escribir las matrices Q y S:

$$Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \begin{cases} q_{nn} & = \lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}_n\{N(h)=n\}-1}{h} \quad = -(\lambda_n + \mu_n). \\ q_{n,n+1} & = \lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}_n\{N(h)=n+1\}}{h} \quad = \lambda_n \\ q_{n,n+1} & \qquad = \mu_n \\ q_{n,m} & = 0 \quad \text{si } |n-m| > 1. \end{cases}$$

escribimos entonces S:

$$S = (S_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \begin{cases} S_{nn+1} & = \frac{q_{nn+1}}{q_n} \qquad = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n} \\ S_{nn-1} & = \frac{q_{nn-11}}{q_n} \qquad = \frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n} \\ S_{nm} & = 0 \quad \text{si } |n-m| > 1. \end{cases}$$

Si $\lambda_0 = 0$, como $\mu_0 = 0$, se tiene que $q_0 = 0$, y luego 0 es absorbente ($p_{00}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$).

4.1. Distribuciones estacionarias y límites

Para $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vector de probabilidad en $\mathbb{N}$ definimos:

$$\mathbb{P}_\eta = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \mathbb{P}_i$$

es decir:

$$\mathbb{P}_\eta \{N(t) = n\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i p_{in}(t).$$

Definición 37 (Distribución estacionaria). $\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es distribición estacionaria para la cadena de nacimiento y muerte* $(N(t))_{t\geq 0}$ *si*

$$\mathbb{P}_\pi \{N(t) = n\} = \pi_n \quad \forall n \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Observación: Si $\lambda_0 = 0$, $\quad \pi = \delta_0$ es estacionaria. Para estudiar las distribuciones estacionarias de la cadena de nacimiento y muerte, examinaremos las ecuaciones forward de la cadena:

$$\begin{aligned} P'(t) =& P(t)Q \\ p'_{in}(t) =& \sum_{k\in\mathbb{N}} p_{ik}(t) q_{kn}. \end{aligned}$$

como $q_{kn} = 0$ si $|k-n| > 1$, se obtiene para $i \in \mathbb{N}$:

$$p'_{in}(t) = \lambda_{n-1} p_{in-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_{in}(t) + \mu_{n+1} p_{in+1}(t).$$

definamos ahora, para η vector de probabilidad en $\mathbb{N}$:

$$P_n(t) = \mathbb{P}_\eta \{N(t) = n\}.$$

y nos quedan las ecuaciones forward de la cadena de nacimiento y muerte:

$$P'_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t). \quad n \in \mathbb{N}$$

por definición se tiene que si η es distribución estacionaria se verifica:

$$P_n(t) = P_n(0) = \eta_n \quad \forall t \geq 0.$$

luego $P'_n(t) \equiv 0$. Así se tiene:

$$\pi \text{ es estacionaria ssi}$$

$$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{con } \mu_0 = 0 \quad \pi_{-1} \doteq 0.$$

Ésta ecuación sólo depende de π_0. Suponemos $\lambda_0 > 0$, entonces la solución verifica:

$$\pi_n \equiv \pi_0 \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod\limits_{l=1} n\mu_l}$$

en efecto:

$$\frac{\lambda_0\cdot, \ldots, \cdot\lambda_n}{\mu_1\cdot, \ldots, \cdot\mu_n} + \frac{\lambda_1\cdot, \ldots, \cdot\lambda_{n-1}}{\mu_0\cdot, \ldots, \cdot\mu_{n-1}} = \frac{\lambda_0\cdot, \ldots, \cdot\lambda_{n+1}}{\mu_0\cdot, \ldots, \cdot\mu_{n-1}} + \frac{\lambda_0\cdot, \ldots, \cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot, \ldots, \cdot\mu_n}$$

Se concluye que existe distribución estacionaria ssi $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \pi_i < \infty$, es decir ssi:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} < \infty.$$

y la distribición estacionaria $\left(\text{que verifica } \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \pi_i = 1\right)$ está dada por:

$$\pi_n = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}{\sum\limits_{n\geq 0} \prod\limits_{l=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \quad \forall n \geq 0.$$

Observación: Supongamos que el proceso de nacimiento y muerte, partiendo de i_0, tenga distribución límite, i.e:

$$\exists \quad r_n = \lim_{t \longrightarrow 0} \mathbb{P}_{i_0} \{N(t) = n\} \quad \forall n \in N.$$

como $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_{i_0 n}(t) = 1$ por Fatou se deduce que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n \leq 1$. en el caso que $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es vector de probabilidad ($\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 1$), se puede probar que $\exists$ distribución estacionaria π, y se tiene $r = \pi$.

4.2. Proceso lineal de nacimiento y muerte

Sean $\lambda > 0, \mu > 0$, consideraremos $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$, como $\lambda_0 = \mu_0 = 0$ el estado 0 es absorbente. Calculemos $M(t) = \mathbb{E}_{i_0}(N(t))$ Recordemos las ecuaciones forward para

$$P_n(t) = P_{i_0 n}(t) \quad n \in \mathbb{N}\ t \geq 0, \text{ reemplazando } \lambda_n = n\lambda\, \mu_n = n\mu \text{ queda :}$$

$$P_n'(t) = (n-1)\lambda P_{n-1}(t) - n(\lambda + \mu)P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t)$$
$$\text{con } P_{-1}(t) \equiv 0.$$

como $M(t) = \sum\limits_{n\geq 0} nP_n(t)$, calculamos:

$$\begin{aligned} nP_n'(t) =&(n-1)^2\lambda P_{n-1}(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t) - n^2\lambda P_n(t) \\ &- n^2\mu P_n(t) + (n+1)^2\mu P_{n+1}(t) - (n+1)\mu P_{n+1}(t) \end{aligned}$$

luego la suma es telescópica, y se puede probar que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2P_n(t) = 0$, de donde:

$$M'(t) = \sum_{n\geq 0} nP_n'(t) = \sum_{n\geq 0}(\lambda-\mu)nP_n(t) = (\lambda-\mu)M(t).$$

con condición inicial $M(0) = i_0 = \mathbb{E}_{i_0}(N(0))$

luego en éste caso:

$$M(t) = i_0 e^{(\lambda-\mu)t}.$$

4.3. Absorción

Consideremos una cadena de nacimiento y muerte con parámetros $(\lambda_n, \mu_n)_{n\geq 0}$ con absorción en 0, es decir $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, y suponemos $\lambda_n > 0,\ \mu_n > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Definición 38 (Tiempo de Absorción).

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 \ \mid \ N(t) = 0\right\}.$$

Queremos calcular las probabilidades de absorción, para $i \in \mathbb{N}$ debemos calcular:

$$\theta_i = \mathbb{P}_i\left\{\tau < \infty\right\}.$$

Se tiene $\theta_0 = 1$. Sea $i \geq 1$, notemos por $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ el esqueleto discreto asociado a $(N(t))_{t\geq 0}$, y por $(\xi_{Y_n})_{n\geq 0}$ los tiempos de permanencia en los estados $(Y_n)_{n\geq 0}$. Y tiene probabilidad de transición:

$$\begin{array}{llll} \mathbb{P}\left\{Y_{n+1} = i+1 \ \mid \ Y_n = i\right\} & = \frac{q_{ii+1}}{q_i} & = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i+\mu_i)} & \\ \mathbb{P}\left\{Y_{n+1} = i-1 \ \mid \ Y_n = i\right\} & = \frac{q_{ii-1}}{q_i} & = \frac{\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)} & \forall i \in \mathbb{N} \end{array}$$

Además:

$$\xi_{Y_n} \sim \exp[(\lambda_{Y_n} + \mu_{Y_n})].$$

y $\xi_{Y_0} = \xi_0$ es el tiempo de permanencia en el estado inicial. Si $Y_0 = i$, $\xi_0 \sim \exp[\lambda_i + \mu_i]$. Seguimos calculando:

$$\begin{aligned}
\theta_i = \mathbb{P}_i\left\{\tau < \infty\right\} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_i\left\{\tau < \infty,\ Y_i = j\right\} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_i\left\{\tau < \infty \ \mid\ Y_1 = j\right\} \mathbb{P}_i\left\{Y_1 = j\right\} \\
&= \mathbb{P}_i\left\{\tau < \infty \ \mid\ Y_1 = i-1\right\} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{P}_i\left\{\tau < \infty \ \mid\ Y_1 = i+1\right\} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \\
&= \mathbb{P}_{i-1}\left\{\tau < \infty\right\} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{P}_{i+1}\left\{\tau < \infty\right\} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad (4.2) \\
&= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\theta_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}\theta_{i+1}
\end{aligned}$$

donde (4.2) viene de la prop. markoviana, luego:

$$(\theta_i - \theta_{i+1}) = \frac{1}{\lambda_i}\mu_i\left(\theta_{i-1} - \theta_i\right) \quad \forall i \geq 1$$

de donde

$$(\theta_i - \theta_{i+1}) = \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j}\right)(1 - \theta_1)\,. \quad \forall i \geq 1 \quad . \tag{4.3}$$

es decir:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - (1 - \theta_1)\left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j}\right)$$

y concluimos:

$$\theta_i = \theta_1\left(1 - \theta_1\right)\sum_{l=1}^{i-1}\prod_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j} \quad \forall i \geq 1. \tag{4.4}$$

Observemos que θ_i es decreciente con i.

- si $\sum\limits_{l\geq 1}\prod\limits_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty$, se deduce que $\theta_1 = 1$ y luego de (4.3) la absorción es segura:

$$\theta_i = 1 \quad \forall i \geq 0.$$

- si $\sum\limits_{l\geq 1}\prod\limits_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j} < \infty$, se puede probar que $\lim\limits_{i\longrightarrow\infty} \theta_i = 0$ y se tiene que:

$$\theta_1 = \frac{\sum\limits_{l\geq 1}\prod\limits_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j}}{1 + \sum\limits_{l=1}^{\infty}\prod\limits_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j}}.$$

y en (4.4):

$$\theta_i = \frac{\sum_{l \geq i} \prod_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j}}{1 + \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{l} \frac{\mu_j}{\lambda_j}}.$$

Examinemos (4.2) se tiene que $\xi_0 < \infty$ $\mathbb{P}_i$-c.s , definimos:

$$\beta_0^{\xi_0^+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \beta_0^{\xi_0^+ + \varepsilon}.$$

Observemos que ξ_0, $N(\xi_0^+) \doteq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} N(\xi_0 + \varepsilon) = Y_1$ son $\beta_0^{\xi_0^+}$ medibles. Además $\tau = (\tau - \xi_0) + \xi_0$, y como $0 < \xi_0 < \infty$, $\xi_0 \leq \tau$ $\mathbb{P}_i$-c.s pues $i \geq 1$. Se tiene $\{\tau < \infty\} = \{\tau - \xi_0 < \infty\}$ $\mathbb{P}_i$-c.s., luego:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i \left(\mathbb{1}_{\tau < \infty} \right) &= \mathbb{E}_i \left(\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\tau < \infty} \, \mathbb{1}_{\xi_0 < \infty} \;\mid\; \beta_0^{\xi_0^+} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_i \left(\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\tau - \xi_0 + \xi_0 < \infty} \, \mathbb{1}_{\xi_0 < \infty} \;\mid\; \beta_0^{\xi_0^+} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_i \left(\mathbb{1}_{\xi_0 < \infty} \, \mathbb{E}_{N_{\xi_0^+}} \left(\mathbb{1}_{\tau - \xi_0 < \infty} \right) \right) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_i \left(\mathbb{1}_{\xi_0 < \infty} \, \mathbb{1}_{N_{\xi_0^+} = j} \, \mathbb{E}_j \left(\mathbb{1}_{\tau < \infty} \right) \right) \\
&= \sum \mathbb{P}_j \left\{ \tau < \infty \right\} \mathbb{P}_i \left\{ Y_1 = j \right\} \\
&\text{(ya que } \mathbb{P}_i \left\{ \xi_0 < \infty \right\} = 1)
\end{aligned}$$

Observación. Para el cálculo anterior usamos la propiedad de Markov fuerte para cadenas a tiempo continuo.

4.3.1. Tiempo medio de absorción

Supongamos que hay absorción casi segura $\mathbb{P}_i \left\{ \tau_0 < \infty \right\} = 1$, es decir

$$\sum_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty.$$

(si $\mathbb{P}_i \left\{ \tau_0 < \infty \right\} < 1$ el tiempo de absorción es ∞) . Sea:

$$z_i = \mathbb{E}_i \left(\tau \right) \quad \text{para } i \geq 0, \text{ con } \tau \doteq \tau_0.$$

como $\mathbb{P}_0\{\tau=0\}=1,\ z_0=0$. Se tiene de la propiedad de markov Fuerte que para $i\geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(\tau) &= \mathbb{E}_i\left(\mathbb{E}\left((\tau-\xi_0)+\xi_0 \ \mid \ \beta_0^{\xi_0^+}\right)\right) \\
\text{(Markov fuerte)} &= \mathbb{E}_i\left(\xi_0+\mathbb{E}_{N_{\xi_0^+}}(\tau)\right) \\
&= \mathbb{E}_i(\xi_0)+\mathbb{E}_i\left(\mathbb{E}_{\mathbb{N}_{\xi_0^+}}(\tau)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{como } \xi_0\sim\exp[\lambda_i+\mu_i] \text{ partiendo de } i, \text{se tiene:} \\
\mathbb{E}_i(\xi_0) &= \frac{1}{\lambda_i+\mu_i} \\
\mathbb{E}_i\left(\mathbb{E}_{N_{\xi_0^+}}(\tau)\right) &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{N_{\xi_0^+}=j}\ \mathbb{E}_j(\tau)\right) \\
\left(\text{pues } 1=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{N_{\xi_0^+}=j}\right) &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_j(\tau)\mathbb{P}_i\left\{N_{\xi_0^+}=j\right\} \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}\mathbb{E}_{i+1}(\tau)+\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\mathbb{E}_{i-1}(\tau)
\end{aligned}$$

luego:

$$z_i=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}z_{i+1}+\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}z_{i-1}\quad \forall i\geq 1.$$
$$\text{con } z_0=0.$$

de donde:

$$\begin{aligned}
(z_i-z_{i-1}) =& \frac{1}{\lambda_i}+\frac{\mu_i}{\lambda_i}\underbrace{(z_{i-1}-z_i)}_{\left(\frac{1}{\lambda_{i-1}}+\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}(z_{i-2}-z_{i-1})\right)} \\
=& \frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_{i-1}}\frac{\lambda_i}{\mu_i}+\frac{1}{\lambda_{i-2}}\cdot\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\cdot\frac{\mu_i}{\lambda_i} \\
&+\ldots+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\mu_2}{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_i}{\lambda_i}(0-z_1)
\end{aligned}$$

de manera compacta:

$$z_i-z_{i+1}=\sum_{l=1}^{i}\frac{1}{\lambda_l}\prod_{r=l+1}^{i}\frac{\mu_r}{\lambda_r}-z_1\prod_{l=1}^{i}\frac{\mu_l}{\lambda_l}.$$

y multiplicando por $\prod\limits_{l=1}^{i}\frac{\lambda_l}{\mu_l}$ queda:

$$\left(\prod_{l=1}^{i}\frac{\lambda_l}{\mu_l}\right)(z_i-z_{i+1})=\sum_{l=1}^{i}\rho_l-z_1 \quad . \tag{4.5}$$

$$\text{donde } \rho_l = \frac{1}{\lambda_l}\prod_{r=1}^{l}\frac{\lambda_r}{\mu_r}$$

Ejercicio 23. Se tiene $z_i \leq z_{i+1}$

- Si $\sum_{k\geq 1}\rho_k = \infty$, si $z_1 < \infty$ el lado izquierdo de (4.5) sería > 0 a partir de un i, lo que es una contradicción. Luego en éste caso $z_1 = \infty$ como:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}z_{i+1} = z_i - \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}z_{i-1}.$$

se deduce que el tiempo de absorción:

$$\mathbb{E}_i(\tau) = \infty \quad \forall i \geq 1.$$

- Si $\sum_{k\geq 1}\rho_k = \infty$, se puede probar que:

$$\left(\prod_{l=1}^{i}\frac{\lambda_l}{\mu_l}\right)(z_i - z_{i+1}) \underset{i\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

y deducimos que (de (4.5)):

$$z_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k.$$

reemplazando en (4.5) es fácil ver que:

$$z_i = \sum_{k=0}^{i-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{\mu_j}{\lambda_j}\right)\sum_{r=k+1}^{\infty}\rho_r \quad \forall i \geq 1.$$

Ejemplo 10. Consideremos un proceso de nacimiento y muerte homogéneo, es decir:

$$\begin{aligned}
&\lambda_n = \lambda > 0\\
&\mu_n = \mu > 0 \quad \forall n > 1\\
&\lambda_0 = \mu_0 = 0.
\end{aligned}$$

En éste caso:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i\{\tau_0 < \infty\} = 1 &\Leftrightarrow \sum_{i\geq 1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i = \infty\\
&\Leftrightarrow \mu \geq \lambda.
\end{aligned}$$

y además si $\mu \geq \lambda$, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_i(\tau) < \infty \quad \forall i \geq 1\\
\Leftrightarrow &\sum_{i\geq 1}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i-1} < \infty \Leftrightarrow \lambda < \mu
\end{aligned}$$

4.4. Procesos de Ramificación continuos

Definición 39 (Proceso de Ramificación continuo). *Dados* $(a_0, a_2, a_3, \ldots) \subset \mathbb{R}_+$ *que verifican:*

$$0 < a_0 + a_2 + \ldots < \infty$$

definimos $a_1 \doteq -(a_0 + a_2 + \ldots)$ $\left(\textit{luego} \sum_{i \geq 0} a_i = 0 \right)$. $(X(t))_{t \geq 0}$ *será un proceso de ramificación continuo si verifica:*

(i) $\mathbb{P}\{X(t+h) = 1 \mid X(t) = 1\} = 1 + a_1 h + o(h)$

(ii) $\mathbb{P}\{X(t+h) = k \mid X(t) = 1\} = a_k h + o(h)$

En éste proceso cada individuo vive y genera su descendencia independiente de los otros, y, dado que hay un individuo, la probabilidad de que se generen $k-1$ individuos en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a a_k. Luego cada uno de los individuos vive un tiempo:

$$T \sim \exp[-a_1]$$

Como ésto ocurre independientemente para cada uno de los individuos en t, se tiene:

$$\mathbb{P}\{X(t+h) = i \mid X(t) = i\} = 1 + i a_1 h + o(h).$$

$$\text{ya que } \left(1 + a_1 h + o(h)\right)^i = 1 + i a_1 h + o(h)$$

Si $j \neq i$, tenemos que las ecuaciones del proceso:

$$\mathbb{P}\{X(t+h) = j \mid X(t) = i\} = \begin{cases} i a_{j-(i-1)} h + o(h) & \text{si } j \geq i-1 \\ 0 & \text{si } j < i-1 \end{cases}$$

Observación. Si ponemos $a_k = 0 \quad \forall k > 2, a_0 = \mu, a_2 = \lambda, a_1 = -(\lambda + \mu)$ el proceso de ramificación corresponde al proceso lineal de nacimiento y muerte, i.e con parámetros $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$.

Escribamos:

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(0) = i\}. \quad P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in \mathbb{N}}$$

El proceso de ramificación es cadena de Markov con semigrupo asociado $P = (P(t))_{t \geq 0}$ Definamos:

$$\Phi(t,s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_{1j}(t) s^j.$$

la función generatriz partiendo de 1 individuo. Por independencia se tiene:

$$\left(\Phi(t,s)\right)^i = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_{ij}(t) s^j \tag{4.6}$$

pues el proceso partiendo de i individuos es suma de i procesos independientes partiendo de 1 individuo. Por otra parte de las ecuacuiones (Ch-K) se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} P_{ij}(t+\tau)s^j =& \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} P_{ik}(t)P_{kj}(\tau)s^j \\ =& \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{ik}(t) \underbrace{\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} P_{kj}(\tau)s^j\right)}_{(\text{de } (4.6)) = (\Phi(\tau,s))^k} \\ =& \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{ik}(t)\left(\Phi(\tau,s)\right)^k\end{aligned}$$

Concluimos:

$$\left(\Phi(t+\tau,s)\right)^i = \left(\Phi(t,\Phi(\tau,s))\right)^i$$

es decir:

$$\Phi(t+\tau,s) = \Phi(t,\Phi(\tau,s)) \tag{4.7}$$

Si ahora consideramos $\tau = h$ con h pequeño, se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi(h,s) =& \sum_{j\in\mathbb{N}} P_{1j}(h)s^j \\ =& (1+a_1h)s + \sum_{j\neq 1} a_j h s^j + o(h) \\ \Phi(h,s) =& s + u(s)h + o(h) \end{aligned} \tag{4.8}$$

con $u(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j s^j$ Reemplazamos en (4.7) y queda:

$$\begin{aligned}\Phi(t+h,s) =& \Phi(t, s+hu(s)+o(h)) \\ \text{(Taylor)} \quad =& \Phi(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)hu(s) + o(h)\end{aligned}$$

y haciendo $h \longrightarrow 0^+$ obtenemos la ec. forward:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s) = u(s)\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) \tag{4.9}$$

con condición de borde $\Phi(0,s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_{1j}(0)s^j = s.$

También podemos obtener una ecuación backward, volvamos a (4.7):

$$\Phi(h+t,s)=\Phi(h,\Phi(t,s))=\Phi(t,s)+hu(\Phi(t,s))+o(h).$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s)=u\left(\Phi(t,s)\right)$$

4.4.1. Media de la Poblacion

Supongamos que partimos de 1 individuo

$$\Phi(t,s)=\sum_{j\in\mathbb{N}}P_{1j}(t)s^j$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)\right|_{s=1}=\sum_{j\geq 1}jP_{1j}(t)=\mathbb{E}\left(X(t)\right)\doteq m(t) \tag{4.10}$$

De (4.9) queda:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)=&\left.\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)\right|_{s=1}\\ =&\left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s)\right|_{s=1}\\ \text{de (4.9)}=&\left.\left(u'(s)\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)+u(s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Phi(t,s)\right)\right|_{s=1}\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}u(1)=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k=0,&\text{ luego:}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)=&\left.u'(1)\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)\right|_{s=1}\\ \text{de (4.10)}=&u'(1)m(t)\end{aligned}$$

como $m(0)=1$:

$$m(t)=e^{u'(1)t}=e^{\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}ka_k\right)t}$$

Si se parte de i individuos, $m(t)=ie^{u'(1)t}$

4.4.2. Probabilidad de Extinción

Sea $\pi = \lim_{t \longrightarrow \infty} P_{10}(t)$ la probabilidad de extinción partiendo de 1 individuo. Se tiene que $P_{10}(t)$ es creciente en t

Observación. Si se parte de i individuos, por independencia la probabilidad de extinción es π^i.

Para calcular π consideramos el siguiente proceso:
Sea $t_0 > 0$. Definamos:

$$Y_n = X(nt_0).$$

Ejercicio 24. Ver que (Y_n) es una cadena de Markov discreta, es un proceso de ramificación discreto.

La función generatriz asociada a éste proceso es:

$$\begin{aligned}
\varphi(s) =& \sum_{k\in\mathbb{N}} P_k s^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left\{Y_1 = k \ \mid \ Y_0 = 1\right\} s^k \\
=& \mathbb{P}\left(\underbrace{X(t_0) = k \ \mid \ X(0) = 1}_{P_{1k}(t_0)}\right) s^k \\
=& \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{1k}(t_0) s^k \\
=& \Phi(t_0, s)
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\varphi(s) = \Phi(t_0, s)$$

La probabilidad de extinción de $(Y_n = X(nt_0))$ es :

$$\pi(t_0) = \inf_{q\in[0,1]} \{q = \phi(q) = \Phi(t_0, q)\}$$

Se tiene

$$\pi = \pi_{t_0} \quad \forall t_0 > 0 \tag{4.11}$$

$$(\mathbb{P}\left\{X(t) = 0 \text{ t suf. grande }\right\} = \mathbb{P}\left\{X(nt_0) \text{ n grande}\right\})$$

Proposición 60. *Si* $a_0 > 0$, $\pi = \inf_{q\geq 0} \{u(q) = 0\}$, *y además:*

$$\begin{aligned}
\pi = 1 \Leftrightarrow & u'(1) \leq 0 \\
0 < \pi < 1 \Leftrightarrow & u'(1) > 0
\end{aligned}$$

Observación. Si $a_0 = 0 \Rightarrow \pi = 0$

Demostración. Se tiene por (4.11)

$$\pi = \pi(t_0) = \Phi(t_0, \pi) \quad \forall t_0 > 0$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,\pi) =& 0 \\ \text{de (4.9)} =& u(\pi)\frac{\partial}{\partial s}\phi(t,\pi). \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) =& \sum_{j\geq 1} jP_{1j}(t)s^{j-1} \\ =& 1 - a_1 t + o(t) \end{aligned}$$

luego $\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)\Big|_{s=\pi} \neq 0$ para t chico, por lo que concluimos $u(\pi) = 0$. Más fácil, usando (4.11):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\pi) = u(\Phi(t_0,\pi)) = u(\pi)$$

$$u''(s) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k s^{k-1} \geq 0$$

luego $u(s)$ es convexa para $s \geq 0$. Se tiene $u(0) = a_0 > 0$, $u(1) = \sum_{k\geq 0} a_k = 0$. y $m(t) = e^{u'(1)t}$ luego si $u'(1) \leq 0$ π es la solución de $u(t) = 0$ con $t \in (0,1)$ y si $u'(1) > 0$ $m(t)$ es exponencial positiva y la solución es 1. $\square$