Clase Auxiliar N°1: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

27 de julio del 2009

Esperanzas Condicionales

Definición 1 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Dada $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub σ -álgebra y una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -medible e integrable definimos $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, esperanza condicional de X con respecto a $\mathcal{G}$ como la única (c.t.p.) función que satisface:

(1) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$ -medible

(2) $\forall A \in \mathcal{G}, \int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$

Propiedades

1. Si X es $\mathcal{G}$ -medible entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$

2. Si $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$

3. Si Y es $\mathcal{G}$ -medible y acotada entonces

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

4. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es otra σ -álgebra entonces

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G})$$

5. Si X es una variable aleatoria tal que $\sigma(X)$ es independiente de $\mathcal{G}$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$

6. El operador $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : L^2(\mathcal{F}) \rightarrow L^2(\mathcal{G})$ es lineal continuo; más aún, es exactamente el proyector ortogonal sobre $L^2(\mathcal{G})$

Problemas

P1. Considere $[0, 1]^2$ dotado de la σ -álgebra $\beta([0, 1]^2)$ y la medida de Lebesgue λ^2 . Considere la sub- σ -álgebra

$$\mathcal{G} = \{A \times [0, 1] : A \in \beta([0, 1])\}$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta([0, 1]^2)$ -medible e integrable.

a) Encuentre una fórmula explícita para $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ en función de f

b) Demuestre que el operador $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : L^p(\beta([0, 1]^2)) \rightarrow L^p(\mathcal{G})$ esté bien definido, es lineal continuo y de norma 1.

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -medible. Consideremos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y sea $\mathcal{G} = \sigma(A_n : n \in \mathbb{N})$. Suponga además que $\mathbb{P}(A_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Demuestre que $\mathcal{G} = \{\bigcup_{n \in J} A_n : J \subseteq \mathbb{N}\}$

b) Demuestre que $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A_n)} \int_{A_n} f d\mathbb{P} \right) 1_{A_n}$

P3. Sea X, Y v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Escribimos $\mathbb{E}(X|Y) := \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$. Si X es integrable, como consecuencia del *Lema de Doob* existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $\mathbb{E}(X|Y) = f(Y)$. De esta manera denotamos $\mathbb{E}(X|Y = y) := f(y)$.

a) Sea G la función de distribución asociada a Y , i.e. $G(t) = \mathbb{P}(Y^{-1}(-\infty, t])$ y sea μ_G su medida de *Lebesgue-Stieltjes* asociada. Demuestre que para toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible se tiene

$$\int_{\Omega} f \circ Y \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_G$$

b) Denotamos para $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A|Y = y) := \mathbb{E}(1_A|Y = y)$. Demuestre la siguiente fórmula habitual en probabilidades:

$$\mathbb{P}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(A|Y = y) \, d\mu_G(y)$$