Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Cristobal Guzmán, Andrés Fielbaum

Pregunta 1 Considere, para cada $t > 0$, la siguiente medida de probabilidad concentrada en $\mathbb{N}$

$$\mu_t(k) = e^{-t}\frac{t^k}{k!}$$

Para $t_1 < ... < t_p$, consideramos la siguiente medida en $\mathbb{R}^p$, concentrada en $\mathbb{N}^p$, dada por

$$\mu_{t_1,...,t_p}(n_1,...,n_p) = 1_{n_1\leq ...\leq n_p}\prod_{j=1}^{p}\mu_{t_j-t_{j-1}}(n_j - n_{j-1})$$

considerando $n_0 = t_0 = 0$.

(i) Demuestre que existe una única medida de probabilidad (que llamaremos $\mathbb{P}$) en $(\mathbb{R}^\infty, \beta(\mathbb{R})^\infty)$ tal que sus leyes finito-dimensionales son las medidas $\mu_{t_1,...,t_p}$ antes definidas. Es decir, notando X_t la proyección en la t-ésima coordenada, $\forall 0 \leq t_1 < ... < t_p, n_1 \leq ... \leq n_p$, se tendrá $\mathbb{P}(X_{t_1} = n_1, ..., X_{t_p} = n_p)$.
(ii) Pruebe que si $\theta < s < t$, entonces $X_t - X_s$ es independiente de X_θ, y además la distribución de $X_t - X_s$ es la misma de X_{t-s}.

Pregunta 2 Sea $(\Omega, \mathcal{B})$ espacio medible, y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre él. Sea X una v.a. integrable.
(i) Considere $\mathcal{G}$ sub-σ-álgebra. Demuestre que $\exists!$ v.a. Z que es $\mathcal{G}$-medible y tal que $\forall D \in \mathcal{G}, \mathbb{E}(1_D X) = \mathbb{E}(1_D Z)$.
(ii) Notaremos $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Suponga ahora que tenemos otra sub-σ-álgebra $\mathcal{H}$ que es independiente de $\sigma(\sigma(X) \cup \mathcal{G})$. Pruebe que $\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{H} \cup \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
(iii) Suponga $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}$ la medida de Lebesgue y $\mathcal{G} = \{A \times [0,1] : A \in \mathcal{B}([0,1])\}$. Determine $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier X como en el enunciado.