MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Clase Auxiliar 12

25 de Octubre de 2009

P1.- Sea (X, Σ, μ) espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible positiva.

(a) Pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}_+$, se tiene $\{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times X : t < f(x)\} \in \beta(\mathbb{R}_+) \otimes \Sigma$.

(b) Sea $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ absolutamente continua, estrictamente creciente y tal $\phi(0) = 0$. Pruebe que

$$\int_X \phi(f(x))d\mu = \int_0^\infty \phi'(t)\mu\{f > t\}dr$$

P2.- Desigualdad de Minkowsky para integrales
Sean $(X, \mathcal{T}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ dos espacios de medida $\sigma-$finitos y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{T} \otimes \mathcal{F}$ medible.

(a) Pruebe que si $f \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left[\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

Ind: Sea q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Estudie la aplicación

$$g \mapsto T(g) = \int \left[\int f(x,y)d\nu(y)\right] g(x)d\mu(x)$$

para funciones $g \in L^q$.

(b) Suponga que $1 \leq p \leq \infty$, que $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ $\nu - c.t.p$ en y y que la función $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ pertenece a $L^1(\nu)$. Pruebe que entonces $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ $\mu - c.t.p$ en x, que la función $x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ pertence a $L^p(\mu)$, y que

$$\left\|\int f(\cdot, y)d\nu(y)\right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y)$$

P3.- Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$ espacios medibles y ν_i, μ_i medidas σ-finitas sobre $\mathcal{T}_i$.

(a) Pruebe que si $\nu_i \ll \mu_i$, para $i = 1, 2$, entonces $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \otimes \nu_2)}{d(\mu_1 \otimes \mu_2)} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2}.$$

(b) Probar que $\nu_i \amalg \mu_i$ para algún i, entonces $\nu_1 \otimes \nu_2 \amalg \mu_1 \otimes \mu_2$.