MA3802 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Auxiliar Teoría de la Medida: Dualidad en los Espacios L^p

19 de Octubre 2009

Pregunta 1. Sea $p \in [1,\infty)$. Sea $(a_n)_{n\in N}$ una sucesión de números reales que verifica: $\exists K > 0$ tal que $\forall b_0,...,b_N \in \mathbb{R}$:

$$|\sum_{n=0}^{N} a_n b_n|^p \leq K \int_0^1 |\sum_{n=0}^{N} b_n t^n|^p$$

Pruebe que $\exists! f \in L^q([0,1])$ (donde q es el Holder-conjugado de p) tal que, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. *Hint: Pruebe primero que los polinomios son densos en* $L^p[0,1]$

Pregunta 2. Sea $X = [0,1]$, dotado de los Borelianos y de la medida de Lebesgue. Probaremos que, en este contexto, $L^1 \subsetneq (L^\infty)^*$. Para ello:
(i) Suponga lo contrario. Pruebe que $\exists h \in L^1$ tal que $\forall f$ continua, $f(0) = \int_0^1 f(x)h(x)dx$.
(ii) Pruebe que $\forall 0 < a < b < 1, \int_a^b h(x)dx = 0$.
(iii) Pruebe que $\int_0^1 h(x)dx = 1$. Concluya.

Pregunta 3. Sea (X,Σ,μ) espacio de medida, $p \in (1,\infty)$. Sea $T : L^p(X,\Sigma,\mu) \times \Sigma$ localmente definida, es decir:

$$\forall f,g \in L^p, \forall B \in \Sigma, \text{ si } f|_B = g|_B \text{ ctp, entonces } T(f,B) = T(g,B)$$

Suponga además que T es lineal continua en la primera variable, y que es finitamente aditiva en la segunda. Demuestre que existe una única función $f \in L^q$, con q el conjugado de p, tal que $\forall g \in L^p, \forall B \in \Sigma, T(g,B) = \int_B fgd\mu$.