MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Clase Auxiliar 9

5 de Octubre de 2009

Problema 1. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Definimos el conjunto

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}) = \{\mu : \mu \text{ es medida con signo finita sobre } (\Omega, \mathcal{F})\}.$$

Además, para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$, se define

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

(a) Pruebe que $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio vectorial.

(b) Sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$, tales que $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Pruebe que $\|\mu - \nu\| = 2 \sup\limits_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)|$. Deduzca que

$$\|\mu - \nu\| = \sup \left\{ \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega f \, d\nu : f \in B(\Omega) \right\},$$

donde $B(\Omega)$ es el conjunto de funciones medibles con norma infinito menor o igual a 1.

(c) Pruebe que $\|\cdot\|$ es una norma sobre $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$.

(d) Pruebe que $(\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
Indicación: Pruebe que para una sucesión de medidas con signo finitas $(\mu_n)_n$, la función

$$\lambda(A) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_n|(A)}{\|\mu_n\|},$$

define una medida finita, que satisface $\mu_n \ll \lambda$, para todo n.

(e) Sea μ_n sucesión de medidas con signo finitas. Pruebe que si $\mu_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \mu$, entonces existe $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\mu_n \ll \lambda$, para todo n, $\mu_n(\Omega) \to \mu(\Omega)$ y

$$\frac{d\mu_n}{d\lambda} \xrightarrow{\lambda} \frac{d\mu}{d\lambda}.$$

Problema 2. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida.

i) Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos medibles, y $\mathcal{C}$ la familia de uniones numerables de elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que $M := \sup_{A \in \mathcal{C}} \mu(A)$ se alcanza para cierto conjunto $C_* \in \mathcal{C}$

A continuación, (X, Σ, μ) se supone finito. Sea $\{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ una familia de medidas de probabilidad en (X, Σ), y suponga que $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$ para todo $\theta \in \Theta$.

ii) Para cada $\theta \in \Theta$ denotamos $A_\theta := \{\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu} > 0\}$. Sean $\mathcal{C}$ y $C_* \in \mathcal{C}$ asociados como en *i)* a la clase $\mathcal{B} := \{A_\theta : \theta \in \Theta\}$.

Pruebe que para todo $\theta \in \Theta$ se tiene $\mathbb{P}_\theta((C_*)^c) = 0$

Indicación: Proceda por contradicción.

iii) Pruebe que la familia $\{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ es *equivalente a una subfamilia numerable*, es decir, existe $\{\theta_0, \theta_1, \dots\} \subseteq \Theta$ tal que

$$\forall N \in \Sigma : \quad \{\mathbb{P}_\theta(N) = 0 \ (\forall\ \theta \in \Theta)\} \Leftrightarrow \{\mathbb{P}_{\theta_n}(N) = 0 \ (\forall\ n \in \mathbb{N})\}.$$

Indicación: Puede ser útil probar que $\theta \in \Theta$, $\mathbb{P}_\theta(N) = 0 \Rightarrow \mu(N \cap A_\theta) = 0$.)