PAUTA CONTROL 1 MA3802

Fecha / Date:

P1 b) Calcular $\lim_{n\to\infty} \int n \cdot \log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{a}\right] d\mu$

Probamos el lím

1) $a \geq 1$, $x > 0$: $\log(1+x^a) \leq ax$ (1 pto.)

Demo.: Para $x=0$ · $\log(1+0) = \log(1) = 0$
$a \cdot 0 = 0$

· $\log(1+x^a)' = \frac{1}{1+x^a} \cdot a x^{a-1} = \frac{a}{x^{1-a}+x}$

Notando que $\forall a \geq 1$ $x^{1-a}+x \geq 1$ (probarlo para $x \geq 1$ y $x<1$), tenemos

$$\frac{d\log(1+x^a)}{dx} \leq a = \frac{d(ax)}{dx}$$

Finalmente, tenemos 2 fcs. con igual extremo inicial y con cotas sobre sus derivadas; por el Teo. Fundamental del Cálculo

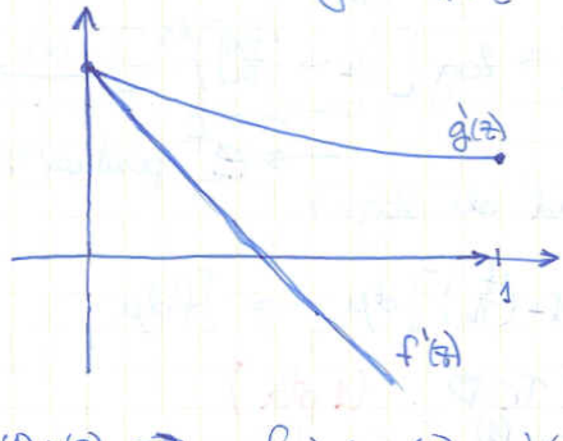
$$\boxed{ax \geq \log(1+x^a)}$$

2) $\underbrace{z-z^2}_{f(z)} \leq \underbrace{\log(1+z)}_{g(z)}$ (la otra se sabe de cálculo) $z \in [0,1]$

(1 pto.)

· $f(0) = 0 = g(0)$ (1)

· $f'(z) = 1-2z$ $\quad g'(z) = \frac{1}{1+z}$



Si vuelven a derivar

$f'(0) = 1 = g'(0)$

$f''(z) = -2 \leq -\frac{1}{(1+z)^2} = g''(z)$

$\Rightarrow \boxed{f'(z) \leq g'(z) \ \forall z \in [0,1]}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $f(z) \leq g(z)$ $\forall z \in [0,1]$

Notas / Notes:

RHEIN

~~Problemas~~ Calculemos las integrales

- $\underline{a\in(0,1)}$: Por Fatou (2 ptos.)

$$\lim_{n\to\infty}\int n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]d\mu$$

Si $0<f<n$: $n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right] \overset{(2)}{\geq} n\left[\left(\frac{f}{n}\right)^a-\left(\frac{f}{n}\right)^{2a}\right]$

$$=[\underbrace{n^{1-a}-n^{1-2a}f^a}_{\to+\infty \text{ (el mayor exponente gana)}}]f^a$$

$\therefore$ Sobre $A_n=\{x: f(x)<n\}$ $\underset{\text{puntualmente}}{n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]\longrightarrow\infty}$

y como f es integrable $\exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \lambda(A_n)>\alpha>0$
(λ = Lebesgue)

Finalmente $\lim_{n\to\infty}\int n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]d\mu\geq\alpha\cdot M \quad \forall M>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int \text{"} d\mu=+\infty$$

- $\underline{a=1}$: Usamos el TCD (1 pto)

  - $n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)\right]\overset{(1)}{\leq} n\cdot\left(\frac{f}{n}\right)=f\in L^1$
  - $n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)\right]=\log\left[\underbrace{\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)\right)^n}_{\to e^f \text{ puntual}^{\text{te}}}\right]\xrightarrow{(*)}\log(e^{f(x)})=f(x)$

  (*) continuidad de $\log(\cdot)$

$$\Rightarrow \int n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)\right]d\mu\longrightarrow\int f\,d\mu$$

- $\underline{a>1}$: Por el TCD (1 pto.)

  - $n\cdot\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]\overset{(1)}{\leq}\cancel{n}\cdot a\cdot\left(\frac{f}{\cancel{n}}\right)\in L^1$
  - $n\cdot\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]=\underbrace{n^{1-a}}_{\to 0}\cdot\log\left[\underbrace{\left(1+\frac{f^a}{n^a}\right)^{n^a}}_{\xrightarrow{\text{puntual}} f^a}\right]\longrightarrow 0 \quad \text{ctp}$

$$\therefore \int n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right]\longrightarrow 0$$

$\blacksquare$

Fecha / Date:

P2) Hip.: $\exists\, \varphi : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty$ (*)

y $\sup_{f\in\mathcal{A}} \int \varphi(|f|)\,d\mu = C < +\infty$

- $\mathcal{A}$ es acotado en L^1 (2 ptos.)

Sea $T>0$ tq $\forall t\geq T$ $\varphi(t)\geq t$ (existe por (*))

$$\Rightarrow \forall f\in\mathcal{A} \quad \|f\|_1 = \int_{\{|f|<T\}} |f|\,d\mu + \int_{\{|f|\geq T\}} |f|\,d\mu$$

$$\therefore \|f\| \leq \mu(X)\cdot T + \underbrace{\int_{\{|f|\geq T\}} \varphi(|f|)\,d\mu}_{\leq C} \leq \mu(X)\cdot T + C < +\infty$$

$\therefore$ $\mathcal{A}$ es acotado en $L^1(\mu)$

- $\mathcal{A}$ es U.I.: (2 ptos.)

Dado $M>0$, siempre existe $T>0$ tq $\forall t>T$

$$\varphi(t)\geq M\cdot t \quad \forall t>T$$

$$\sup_{f\in\mathcal{A}} \int_{|f|>a} |f|\,d\mu \leq \sup_{f\in\mathcal{A}} \left\{ \int_{|f|>T} |f|\,d\mu \right\} \quad \forall a>T$$

$$\leq \underbrace{\sup_{f\in\mathcal{A}} \left\{ \int_{|f|>T} \varphi(|f|)\,d\mu \right\}}_{\leq C} \cdot \frac{1}{M}$$

$$\leq C/M$$

$$\therefore (\forall M>0)(\exists\, T\in\mathbb{R}_+)(\forall a>T) \quad \sup_{f\in\mathcal{A}} \int_{|f|>a} |f|\,d\mu \leq C/M$$

$$\therefore \boxed{\lim_{a\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{A}} \int_{|f|>a} |f|\,d\mu = 0}$$

- Si $A\subseteq L^p(X,\mathcal{B},\mu)$ $p>1$ es acotado en $\|\cdot\|_p$, tomamos $\varphi(t)=t^p$, que satisface: (2 ptos.)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^p}{t} = +\infty \quad y \quad \sup_{f\in A} \int |f|^p\,d\mu = C < +\infty$$

Notas / Notes:

$\Rightarrow$ A es U.I. ☒