MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Clase Auxiliar 10

13 de Octubre de 2009

Problema 1. Sea $(X,\mathcal{B})$ espacio medible. Sea $T : X \to X$ $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ medible y μ medida de probabilidad. Se dice que T es μ- invariante (o que μ es invariante para T) si $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Se dice que μ es ergódica si es invariante para T y

$$(\forall A \in \mathcal{B}) \quad \mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0 \Rightarrow \{\mu(A) = 0 \vee \mu(A) = 1.\}$$

Consideremos el simplex de medidas de probabilidad invariantes para T

$$\bar{\Delta}(\Omega, T) = \{\mu : \mathcal{B} \to [0,1],\ \mu(\Omega) = 1, \mu \text{ es invariante para } T\}.$$

(a) Probar que $\bar{\Delta}(\Omega, T)$ es un conjunto convexo.

(b) Probar que μ es ergódica ssi μ es un punto extremo del convexo $\bar{\Delta}(\Omega, T)$. Para ésto se sugiere:

(I) Para probar $\Rightarrow$ suponer que μ no es ergódica y encontrar una combinación convexa de medidas en $\bar{\Delta}(\Omega, T)$.

(II) Para $\Leftarrow$, muestre que si μ es ergódica y existen μ_1, μ_2 medidas de probabilidad invariantes para T tal que $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$, con $p \in (0,1)$, entonces $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Ésto puede probarse encontrando una función $f \in L^1$ no negativa tal que

$$\mu_1(B) = \int_B f\, d\mu, \forall B \in \mathcal{B}.$$

Luego, si $E = \{f < 1\}$, demuestre que$\int_{E \setminus T^{-1}E} f\, d\mu = \int_{T^{-1}E \setminus E} f\, d\mu$, y deduzca que $f = 1$.

(c) Si μ y ν son ergódicas y $\mu \neq \nu$, entonces $\mu \,\mathrm{II}\, \nu$.

Problema 2.

(a) (Principio de Selección de Helly) Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada, y sea D cualquier subconjunto numerable de X. Entonces existe una subsucesión de f_n que converge puntualmente sobre D.

(b) Sea $D \subset [a,b] = X$ tal que $a \in D$ y $b = Sup(D)$. Muestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces f se puede extender sobre $[a,b]$ por una función creciente.

(c) Sea f_n una sucesión de funciones crecientes sobre $[a,b]$ uniformemente acotada. Muestre que esta posee una subsucesión que converge puntualmente a una función creciente f en $[a,b]$ (que está acotada por la misma cota que la sucesión).

(d) Usando lo anterior, demostrar el siguiente

Teorema 0.1. (Primer teorema de Helly)

Sea f_n una sucesión acotada en $BV[a,b]$, i.e. $||f_n||_{BV} < K$, $\forall n$. Entonces existe una subsucesión que converge puntualmente sobre $[a,b]$ a una función $f \in BV[a,b]$ (que satisface igualmente $\|f\|_{BV} < K$).

Problema 3. Pruebe que una función f pertenece a $NBV[0,1]$ si y sólo si existe una medida con signo finita μ sobre $([0,1],\mathcal{B})$, tal que $f(x) = \mu([a,x])$. Concluya que existe una isometría entre $NBV[0,1]$ y $M([0,1],\mathcal{B})$.
Indicación: Considere las variaciones positiva y negativa de f

$$P(f,[a,x]) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]_+$$

$$N(f,[a,x]) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]_-.$$

Problema 4. Sea $(\Omega,\mathcal{F})$ espacio medible, y μ, ν dos medidas con signo finitas definidas sobre $\mathcal{F}$.

(a) Pruebe que μ y ν son singulares entre sí ssi $|\mu|$ y $|\nu|$ lo son.

(b) Pruebe que si se cumple lo anterior
$$\|\mu - \nu\| = \|\nu\| + \|\mu\|.$$

(c) Suponga que Ω es infinito no numerable y que para todo $x \in \Omega$, $\{x\} \in \mathcal{F}$. Pruebe que el espacio $(\mathcal{M}(\Omega), \|\cdot\|)$ no es separable.