MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Auxiliar Extra

24 de Septiembre de 2009

Pregunta 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x,\cdot) \text{ es de clase } \mathcal{C}^1, \forall t \in \mathbb{R}, f(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}, dx)$$

Suponga además que existe $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ tal que $\forall x, t, |\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$.
Pruebe entonces que la función $F(t) = \int f(x,t)dx$ es continuamente diferenciable, con derivada dada por $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

Pregunta 2. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua a la derecha, y notemos μ_F la medida de Lebesgue-Stieljes que induce. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$. Se quiere probar la fórmula de integración por partes siguiente:

$$\int f(x) 1_{[0,1]}(x) d\mu_F = F(1)f(1) - F(0^-)f(0) - \int_0^1 F(x)f'(x)dx$$

. Para ello:
(i) Defina $x_i^n = \frac{i}{2^n}$ para $i = 0, ..., 2^n$. Pruebe que

$$f_n(x) = f(0)1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} f(x_i^n) 1_{(x_i^n, x_{i+1}^n]}$$

converge puntualmente a f en $[0,1]$. Deduzca que $\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F \to \int f 1_{[0,1]} d\mu_F$ cuando $n \to \infty$.
(ii) Pruebe que $\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F = F(1)f(\frac{2^n-1}{2^n}) - F(0^-)f(0) - \sum_{i=1}^{2^n-1} F(x_i^n)(f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n))$.
(iii) Concluya el resultado. *Hint: Recuerde que, como f es continuamente diferenciable,* $\forall y, x, f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(|x-y|)$.

Pregunta 3. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida finita, con $\mu(X) = 1$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \in L^p \forall 1 \leq p < \infty$. Probaremos que $\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty$ (pudiendo ser este valor infinito). Para ello:
(i) Pruebe el resultado si $||f||_\infty = 0$.
(ii) En caso contrario, pruebe directamente que $\limsup ||f||_p \leq ||f||_\infty$.
(iii) Pruebe que $\liminf ||f||_p \geq \alpha \forall \alpha < ||f||_\infty$. Concluya.