MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Clase auxiliar 5

31 de Agosto de 2009

P1.- Sea (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la tribu boreliana y $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida finita.

(a) Probar que todo boreliano B satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, F \subseteq X \text{ cerrado})(\exists\, U \subseteq X \text{ abierto}) \quad F \subseteq B \subseteq U \;\text{ y }\; \mu(U \setminus F) \leq \epsilon.$$

Para ésto se sugiere probar que

(I) La propiedad es válida si B es cerrado.
(II) Defina $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} :\ \text{la propiedad es cierta para } B\}$, y demuestre que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.
(III) Concluya.

(b) Demuestre que si (X, d) es σ-compacto, entonces μ es regular.

P2.- Sea F un conjunto de funciones a valores reales definidas en X. Se define la tribu generada por F por

$$\sigma(F) := \sigma(\{f^{-1}(C) : f \in F, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}).$$

Pruebe que si $\mathcal{D}$ es una clase que genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$\sigma(F) = \sigma(\{f^{-1}(C) : f \in F, C \in \mathcal{D}\}).$$

P3.- (*Teorema de la Clase Monótona Funcional*)
Sea X un conjunto y $\mathbb{B}(X)$ el e.v. de funciones acotadas a valores reales.

Definición 0.1. *Sea H s.e.v. de $\mathbb{B}(X)$. Se dice que H es un EVM si satisface:*

I) *H contiene a las constantes.*
II) *Para toda sucesión $(f_n)_n \subseteq H$ creciente con $f = \lim_n f_n$ acotada se tiene que $f \in H$.*

a) Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(X)$ cerrada para la intersección y tal que $H \supseteq \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{C}\}$. Pruebe que H contiene a $\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(\mathcal{C}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \text{medible}\}$.

El objetivo de este problema es probar el siguiente

Teorema 0.1. *(Clase Monótona Funcional)*
Sea $H \subseteq \mathbb{B}(X)$ un EVM y $H_0 \subseteq H$ cerrado para la multiplicación. Entonces H contiene a

$$\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(H_0) - \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \text{medible}\}.$$

Para hacerlo supongamos adicionalmente que H es cerrado para la convergencia uniforme (en el próximo problema veremos que ésto siempre se cumple).

b) Pruebe que

1) Para todo polinomio p y toda $f \in H_0$ se tiene $p(f) \in H$. Deduzca que para toda función continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene $\phi(f) \in H$ para toda $f \in H_0$.

2) Ayudandose de la sucesión de funciones $\phi_n(y) := [1 \wedge ((y-a) \vee 0)]^{\frac{1}{n}}$, muestre que para cada $a \in \mathbb{R}$, se tiene $\mathbb{I}_{\{f>a\}} \in H$.

c) Concluya el resultado.

P4.- Pruebe el siguiente

Lema 0.1. *(Atkinson)*
Todo EVM es cerrado para la convergencia uniforme.

Hint: Dado $f_k \to f$ unif. obtenga una subsucesión n_k tal que $\epsilon_k = \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$ sea sumable. Luego utilice la sucesión $g_k = f_{n_k} - \sum\limits_{j \geq k} e_j + 2a_1$.