MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Clase auxiliar 2

10 de Agosto de 2009

Definición 0.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Dos clases $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ se dicen independientes si $\forall \in \mathcal{C}_1$ y $B \in \mathcal{C}_2$ se tiene*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ésto se denotará $\mathcal{C}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_2$.

Si ahora $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}$ es una familia arbitraria de partes de Ω, se dirá que las colecciones son independientes si para todo $I \subseteq \Lambda$, I finito, $A_i \in \mathcal{F}_i$ $i \in I$, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

P1.- Pruebe que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son clases independientes, y además son cerradas para la intersección, entonces $\sigma(\mathcal{C}_1)$ y $\sigma(\mathcal{C}_2)$ son σ-álgebras independientes.

Hint: Use el π-λ teorema (páginas 7 y 8 del apunte).

P2.- (*Lema de Borel-Cantelli*)

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad.

a) Pruebe el Lema de Borel-Cantelli:

Lema 0.1. *(Borel-Cantelli)*

Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles. Entonces

$$\sum_n \mu(A_n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup_n A_n) = 0$$

b) Ahora se busca una suerte de recíproca, bajo la hipótesis adicional

Las clases $\mathcal{A}_n = \{A_n\}$ $n \geq 1$ son independientes.

Para ésto pruebe que:

(I) Las clases $\mathcal{B}_n = \{A_n, A_n^c\}$, con $n \in \mathbb{N}$ son independientes.

(II) Pruebe la implicancia

$$\sum_n \mu(A_n) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup_n A_n) = 1$$

<u>Hint</u> Pruebe que $\mu(\liminf_n A_n^c) = 0$, para lo cual puede ser útil la siguiente desigualdad:

Para una familia finita de números $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \leq e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

P3.- (*Ley 0-1 de Kolmogorov*)

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ esp. de probb. y $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ σ-álgebras independientes. Sea $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{k\geq n} \mathcal{B}_k\right)$. El objetivo es probar que

$$\forall A \in \mathcal{A}_\infty \quad \mathbb{P}(A) = 0 \vee \mathbb{P}(A) = 1.$$

Para esto se pide

a) Probar que $\mathcal{S} = \{\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j : J \subset \mathbb{N} \text{ finito}, A_j \in \mathcal{B}_j\}$ es semiálgebra.

b) Probar que $\sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n\right) = \sigma(\mathcal{S})$.

c) Si se definen $\Sigma_n^\infty = \sigma\left(\bigcup_{k\geq n} \mathcal{B}_k\right)$ y $\Sigma_0^n = \sigma\left(\bigcup_{k<n} \mathcal{B}_k\right)$. Pruebe que $\Sigma_n^\infty \perp\!\!\!\perp \Sigma_0^n$.

d) Pruebe que $\mathcal{A}_\infty \perp\!\!\!\perp \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_0^n$ y que $\mathcal{A}_\infty \perp\!\!\!\perp \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_0^n\right)$.

e) Pruebe que $\mathcal{A}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}_\infty$ y concluya.