Auxiliar 7: Optimización

Profesor : Alejandro Jofré
Auxiliares : Nicolás Hernández & Emilio Vilches
9 de octubre de 2009

1. Preliminares

Para resolver el problema de minimización sin restricciones

$$\min\{f(x),\, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1}$$

consideramos el algoritmo

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

donde α^k es llamado el paso y d^k es una dirección de descenso, es decir, satisface

$$f(x^k + \alpha^k d^k) < f(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Para escoger la dirección de descenso podemos considerar:

1. **"Método del máximo descenso"**

$$d^k = -\nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

2. **"Método de Newton"**

$$d^k = -\left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k), \text{ siempre que } \nabla^2 f(x^k) \text{ sea definido positivo} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Para escoger el paso podemos considerar las siguientes reglas

1. **"Regla de minimización:"** En cada iteración α^k es tal que la función f es minimizada a lo largo de la dirección d^k, esto es, α^k satisface

$$f(x^k + \alpha^k d^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha d^k). \tag{4}$$

2. **"Regla de minimización limitada:"** En cada iteración α^k es tal que

$$f(x^k + \alpha^k d^k) = \min_{\alpha \in [0,s]} f(x^k + \alpha d^k). \tag{5}$$

   donde $s > 0$ es un escalar fijo.

3. **"Regla de Armijo o de reducciones sucesivas:"** Sean s, β y σ, con $s > 0$, $0 < \beta < 1$, y $0 < \sigma < 1$ escalares fijos. En cada iteración $\alpha^k = \beta^{m_k} s$ donde m_k es el primer entero no negativo m que satisface

$$f(x^k) - f(x^k + \beta^m s d^k) \geq -\sigma \beta^m s \nabla f(x^k)^t d^k. \tag{6}$$

2. Problemas

Problema 1.
Considere la función $f(x,y) = \left(x + y^2\right)^2$. En el punto $\vec{x} = (1,0)$ consideramos la dirección $\vec{d} = (-1,1)$. Muestre que d es una dirección de descenso encontrando todos los minimizantes del problema (4).

Problema 2.
Considere el problema de minimizar la función de dos variables $f(x,y) = 3x^2 + y^4$.

(a) Aplique una iteración del método del máximo descenso con punto inicial $(1,-2)$ y la elección del paso se hace con la regla de Armijo con $s = 1$, $\sigma = 0{,}1$, y $\beta = 0{,}5$.

(b) Repita lo hecho en (a) usando $s = 1$, $\sigma = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1$. ¿Cómo es el valor de la función en la nueva iteración comparada con la obtenida en (a)?

(c) Aplique una iteración del método de Newton con el mismo punto de partida y regla del paso que la usada en (a). ¿Cómo es el valor de la función en la nueva iteración comparada con la obtenida en (a)?

Problema 3.
el propósito de este ejercicio es mostrar que el método de Newton es invariante por escalamiento lineal de las variables. Considere una transformación lineal invertible de variables $x = Sy$. Escriba el método de Newton en el espacio de la variable y y muestre que este genera una sucesión $y^k = S^{-1}x^k$, donde $\{x^k\}$ es la sucesión generada por el método de Newton en el espacio de la variable x. ¿Qué sucede con el método del máximo descenso?

Problema 4.
Considere el problema

$$(\mathcal{P}) \quad \text{mín } f(u,v) = 5u^2 + 5v^2 - uv - 11u + 11v$$

1. Encontrar un punto x^* que satisfaga las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. Diga si este punto es óptimo global, si es único y justifique.

2. Determine la tasa de convergencia del método del gradiente en este caso.

3. A partir del punto $x_0 = (0,0)^t$, ¿cuántas iteraciones (k) del método del gradiente son necesarias para garantizar que el error, $e(x) = \left[(x-x^*)^t Q(x-x^*)\right]^{1/2}$ se reduce desde $e(x_0)$ a $10^{-11}e(x_0)$. La matriz Q representa la matriz de la forma cuadrática de f.