Auxiliar 5: Optimización

Profesor : Alejandro Jofré

Auxiliares : Nicolas Hernández & Emilio Vilches

24 de septiembre de 2009

Problema 1.
Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) := \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Consideremos el problema de optimización siguiente:

$$\mathcal{P} \quad \text{mín}\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

0. Demostrar que $\mathcal{P}$ posee una única solución $\overline{x}$, caracterizada como la única solución de la ecuación $\nabla f(x) = 0$.

Para aproximar $\overline{x}$, utilizamos el algoritmo del gradiente con paso optimal, que consiste en construir una sucesión (x_k) de la manera iterativa siguiente:
Inicialización: $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
Definición de la iteración x_{k+1} a partir de x_k (cuando $\nabla f(x_k) \neq 0$):

$$x_{k+1} := x_k + t_k d_k,$$

donde $d_k := -\nabla f(x_k)$, y t_k es la única solución real (positiva) minimizando $t \mapsto f(x_k + t d_k)$ sobre $\mathbb{R}$.
El propósito de este problema es dar una idea de la rapidez de convergencia de (x_k) a $\overline{x}$ en función de un número asociado a la matriz A llamado el condicionamiento de A.

1. Verificar las siguientes relaciones: Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$t_k = \frac{d_k^T d_k}{d_k^T A d_k}, \;\; d_{k+1} = d_k - t_k A d_k, \;\; d_{k+1}^T d_k = 0,$$

$$f(x_{k+1}) - f(\overline{x}) = [f(x_k) - f(\overline{x})] \left[1 - \frac{\left(d_k^T d_k\right)^2}{\left(d_k^T A d_k\right)\left(d_k^T A^{-1} d_k\right)} \right], \tag{1}$$

2. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ los valores propios de A ordenados de forma decreciente. Definimos

$$c_2(A) := \frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \text{ llamado el } \textbf{condicionamiento} \text{ de } A.$$

Demostrar las siguientes desigualdades: Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x_k) - f(\overline{x}) \leq [f(x_0) - f(\overline{x})] \left[\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right]^{2k} \tag{2}$$

$$\|x_k - \overline{x}\| \leq \left[\frac{2(f(x_0) - f(\overline{x}))}{\lambda_n} \right]^{1/2} \left[\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right]^k. \tag{3}$$

Indicación: Puede utilizar el *lema de Kantorovitch*: Si A es simétrica, definida positiva, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} \geq \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}$$

donde λ_1 y λ_n son respectivamente el menor y el mayor valor propio de A.

3. Concluir que si $k \to +\infty$ entonces $x_k \to \overline{x}$.

4. Sea $\varepsilon < 1$. Muestre que si

$$k \geq \frac{\ln \varepsilon}{2 \ln \left(\frac{c_2(A)-1}{c_2(A)+1} \right)}$$

entonces,

$$\frac{f(x_k) - f(\overline{x})}{f(x_0) - f(\overline{x})} \leq \varepsilon$$

¿Qué sucede cuando $c_2(A)$ es muy grande?

5. ¿Qué puede decir de la rapidez de convergencia del método del gradiente a paso optimal en función de $c_2(A)$?.

Ejercicio 1.
Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad x_1 + x_2 \\ &\text{s.a} \; - x_1 - x_2^2 + \varepsilon \geq 0 \end{aligned}$$

realice un análisis de sensibilidad con respecto al parámetro ε.